АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ИНСТИТУТ ГИДРОМЕХАНИКИ

ТЕЧЕНИЯ СО СВОБОДНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

КИЕВ НАУКОВА ДУМКА 1985

УДК 532.5/6

Течения со свободными поверхностями / Г. В. Логвинович, В. Н. Буйвол, А. С. Дудко, С. И. Путилин, Ю. Р. Шевчук.— Киев : Наук. думка, 1985.— 296 с.

В монографии изложены результаты исследований, относящихся к течениям со свободными поверхностями. Главным отличием этих течений является их пространственный характер и учет в математических моделях специфических, присущих реальным течениям особенностей. Рассматриваются осесимметричные кавитационные течения невесомой жидкости, а также течения в продольном поле силы тяжести. Значительное место отведено неосесимметричным задачам гидродинамики течений со свободными поверхностями, течениям за крыльевыми системами и в вихревых воронках.

Для научных и инженерно-технических работников, занимающихся проблемами гидродинамики течений со свободными поверхностями.

Ил. 150. Табл. 2. Библиогр.: с. 287—293 (170 назв.).

Авторы
Г. В. Логвинович, В. Н. Буйвол, А. С. Дудко,
С. И. Путилин, Ю. Р. Шевчук

Ответственный редактор *А. Н. Гузь*

Рецензенты *И. А. Луковский, Н. А. Шульга*

Редакция физико-математической литературы

Т $\frac{1703040000-237}{М221(04)-85}$ 166-85

ПРЕДИСЛОВИЕ

Проблемы современной гидродинамики связаны преимущественно с движением тел в жидкости либо с течениями жидкостей в определенных стесненных условиях. Изучение различного рода течений приводит к необходимости решать гидродинамические задачи. При этом зачастую экспериментальные пути их решения оказываются трудными, а теоретические методы не позволяют получить простые и надежные формулы. В этих условиях успех достигается, как правило, с помощью хорошего анализа общих физических свойств течений, присущих различным их классам и типам.

Большие скорости неизбежно порождают течения с разрывами сплошности, ведут к появлению свободных границ и поверхностей. Теоретические построения и эксперимент показывают, что традиционный подход к гидродинамическим задачам, основанный в этом случае на поисках непрерывных решений, не всегда приводит к цели. Этот разрыв с традицией в инженерной практике проявляется в том, что форма хорошо обтекаемых тел по различным причинам становится в случае больших скоростей невыгодной. Переход же к течениям с образованием свободных поверхностей требует новых методов расчетов, по которым можно получить более выгодный режим обтекания, чем при течениях без разрыва сплошности. Это ведет к естественному использованию атрибута высокоскоростных движений — свободных поверхностей. Они неизбежно возникают при входе тел в жидкость, глиссировании тел по поверхности жидкости, обтекании выступов, течениях с образованием кавитационных полостей. Образующиеся при этом свободные поверхности течений имеют свои законы движения, определяют основные характеристики течений. Знание законов движения свободных границ необходимо при построении моделей конкретных практически важных течений, которые позволяют прогнозировать поведение этих течений при изменении тех или иных условий.

Анализ физических особенностей даже весьма сложных пространственных течений, которые сопровождаются образованием свободных поверхностей, зачастую позволяет получить простые оценки влияния основных факторов, что облегчает построение приближенных расчетных формул и методик для процессов, не поддающихся «точным» расчетам. Этим, конечно, не исчерпывается ценность хороших приближений, поэтому в данной работе они встречаются не только применительно к теоретическим изысканиям, но и при анализе постановки и результатов экспериментальных исследований.

Наиболее изученными кавитационными течениями являются осесимметричные и плоские. Учитывая важность указанных течений для приложений, мы

кратко излагаем некоторые основные результаты в этих областях с уклоном к нестационарным течениям. В основе работы лежит построение простых методов, позволяющих определить форму свободных поверхностей с учетом действия ряда специфических особенностей, приближающих схематизированное течение к реальному.

В гл. 1 кратко излагается общая теория и общие результаты, имеющие отношение ко всем течениям со свободными поверхностями, чаще всего известные утверждения, но применительно именно к таким течениям.

Гл. 2 посвящена изложению результатов по осесимметричным кавитационным течениям, полученным в основном с использованием общих законов сохранения. Эти результаты тоже отличаются известной общностью, хотя и относятся к течениям идеальной жидкости.

В гл. 3 с помощью основных соотношений гидродинамики тонкого тела в тесной связи с законами сохранения результаты гл. 2 обобщаются на случай явного проявления действия поля силы тяжести, коллинеарного невозмущенной скорости течения.

В гл. 4 методы теории тонкого тела применяются к расчету гидродинамических характеристик крыльев малого удлинения, движущихся вблизи жестких и подвижных криволинейных границ. Приводятся общие соотношения и рассмотрены некоторые вопросы методики численного решения задач о поперечном обтекании сечения тела и расчета возмущений свободной поверхности.

Гл. 5 и 6 посвящены возмущенным кавитационным течениям. В гл. 5 на основе соотношений гидродинамики тонкого тела и теории малых возмущений получена система нелинейных дифференциальных уравнений для определения возмущений. С помощью данной системы исследуются задачи этих двух глав. В гл. 5 рассматриваются кавитационные течения за эллиптическими кавитаторами при наличии местных возмущений давления, а также каверны за выступом. В гл. 6 исследуются несимметричные кавитационные течения в весомой жидкости как за дисками, так и за кавитаторами эллиптической формы.

В гл. 7 излагается итерационный метод теоретического расчета распределения циркуляции вращательной скорости и кривизны свободной поверхности для течения вязкой жидкости в вихревой воронке, а также анализируются результаты изучения некоторых аспектов гидродинамического взаимодействия твердых плавающих тел с вихревыми воронками. Приводятся данные экспериментального исследования профиля вращательной скорости жидкости в неразвитой вихревой воронке, полученные с помощью лазерного доплеровского измерителя скорости.

Г. В. Логвиновичем написана гл. 1 и совместно с В. Н. Буйволом — гл. 2 и 3; С. И. Путилиным — гл. 4, в гл. 5 В. Н. Буйволом и Ю. Р. Шевчук — § 1 и 2, Ю. Ф. Журавлевым и Ю. Р. Шевчук — § 3, С. И. Путилиным — § 4; В. Н. Буйволом и Ю. Р. Шевчук — гл. 6; А. С. Дудко — гл. 7.

Авторы выражают благодарность А. Н. Макаренковой, Л. М. Троценко и С. К. Гавриленко за большую помощь в оформлении рукописи. Они также весьма признательны ответственному редактору акад. АН УССР А. Н. Гузю и рецензентам чл.-кор. АН УССР И. А. Луковскому и д-ру физ.-мат. наук Н. А. Шульге за ценные замечания, сделанные при просмотре рукописи.

ГЛАВА 1

ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ТЕЧЕНИЯ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ

В данной главе рассматриваются некоторые общие свойства потенциальных и вообще нестационарных течений идеальной жидкости с подвижными свободными границами. Следует иметь в виду, что в подавляющем большинстве практических задач, связанных с движением тел на поверхности жидкости, свободные границы имеют сложную криволинейную форму и точное решение уравнения Лапласа практически неосуществимо. Поэтому всегда приходится идти на те или иные рациональные упрощения, выбор которых требует детального исследования течения.

Предполагается, что теория потенциальных течений известна, поэтому внимание акцентируется на тех особенностях, которые свойственны течениям со свободными границами. Особое внимание обращено на разъяснение некоторых особенностей в уравнениях гидродинамики и на составление физически наглядной картины течения.

§ 1. ПОТЕНЦИАЛ СКОРОСТЕЙ И ФУНКЦИЯ ТОКА

Математически потенциал скоростей φ определяется как функция координат x, y, z и времени t, градиент которой равен вектору скорости $\vec{v}$ жидкости в этой точке пространства. Таким образом, $\vec{v} = \operatorname{grad} \varphi$ или

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \tag{1.1}$$

Из теории потенциала известно, что функция φ однозначна в односвязном пространстве, не имеет ни максимума, ни минимума внутри жидкости, а потенциальное поле лишено вихрей и источников.

Для несжимаемой жидкости тот факт, что в каждый элементарный объем пространства за любой интервал времени должно втекать столько же жидкости, сколько из него вытекает, выражается уравнением непрерывности [75]

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Для потенциальных течений после подстановки в уравнение $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ компонентов $\partial\varphi/\partial x$, $\partial\varphi/\partial y$, $\partial\varphi/\partial z$ получаем уравнение Лап-

ласа

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0. \qquad (1.2)$$

В подвижной системе координат уравнение Лапласа сохраняет тот же вид.

В каждой точке x, y, z скоростного поля $\vec{v}\,(x, y, z, t)$, для которой удовлетворяется уравнение Лапласа $\Delta\varphi = 0$, отсутствуют источники и вихри.

Иногда бывает удобно рассматривать условие непрерывности для некоторой конечной части пространства x, y, z, заполненного жидкостью и ограниченного замкнутой поверхностью Σ. Эта поверхность может быть неподвижной или подвижной, свободной или твердой. Если абсолютные скорости перемещения поверхности Σ вдоль внутренней нормали к ней обозначить V_n, а для абсолютных скоростей жидкости оставить прежнее обозначение $\vec{v}$, общее условие непрерывности выражает тот факт, что поток объема жидкости внутрь области Σ должен быть равен скорости приращения объема самой области Σ. Если $\vec{e}_n$ — единичный вектор внутренней нормали, то в единицу времени через элемент поверхности $\delta\Sigma$ внутрь области Σ втекает объем $(V_n - \vec{e}_n\vec{v})\,\delta\Sigma$, тогда как скорость возрастания объема области Σ будет $\iint V_n d\Sigma$. Интегрируя первое выражение по всей поверхности Σ и приравнивая результат ко второму интегралу, получаем общее уравнение непрерывности

$$\iint\limits_{\Sigma} \vec{e}_n\vec{v}\,d\Sigma = 0. \qquad (1.3)$$

В это уравнение не входит собственное движение границ области Σ. Важно иметь в виду, что общее уравнение непрерывности не указывает на отсутствие вихрей и источников внутри области Σ. Наличие внутри области Σ замкнутого вихря или источника и стока равных интенсивностей, т. е. диполя, не нарушит условия (1.3). Поэтому течение, удовлетворяющее уравнению (1.3), может быть как потенциальным, так и не потенциальным во всех или некоторых частях пространства Σ, тогда как течение, удовлетворяющее условию (1.2), в области Σ потенциально во всех точках этой области.

Функция тока ψ выражает поток жидкости, протекающий в единицу времени через заданную поверхность. В плоском случае $\delta\psi = -v_x\delta y$ и $\delta\psi = v_y\delta x$, следовательно,

$$v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\partial\psi}{\partial y}; \quad v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

В осесимметричном случае, если Ox — ось симметрии, а r — расстояние от точки до этой оси, имеем $\delta\psi = v_x r\delta r$. Приведем уравнение Лапласа для φ и уравнение непрерывности для ψ в случае осесимметричного течения с осью симметрии x. Поскольку r — расстояние от точки до оси симметрии x, эти уравнения имеют вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0, \qquad (1.4)$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} = 0.$$

Рис. 1.1. Схема линий тока при погружении тела.

Функцию тока на свободных границах следует понимать как поток, протекающий через элемент площади свободной границы δS в единицу времени, в том случае, если этот элемент площади мгновенно остановлен, но скорость частиц $\vec{u}$ сохранилась.

Условимся поток, втекающий в рассматриваемую область жидкости, считать положительным. На свободной поверхности, если скорость u_n направлена наружу, $\delta\psi = \vec{e}_n\vec{u}\delta S < 0$, поскольку внутренняя нормаль считается положительной. На рис. 1.1 показана схема линий тока, идущих от внутренней границы к внешней.

§ 2. ПОТЕНЦИАЛ СКОРОСТЕЙ НА СВОБОДНЫХ ГРАНИЦАХ

Как известно, в односвязном пространстве потенциал скоростей можно выразить как линейный интеграл скорости, взятый вдоль произвольной переводимой кривой, проведенной между точками A и B. Если элемент длины контура обозначим ds, скорость жидкости в точках отрезка ds — $\vec{v}$, вектор касательной — $\vec{e}_s$, то получим

$$\varphi_B - \varphi_A = \int\limits_{s_A}^{s_B} \vec{e}_s\vec{v}\,ds = \int\limits_{A}^{B} (v_x dx + v_y dy + v_z dz).$$

Относя точку A к бесконечности, где жидкость покоится, значение φ_A считаем равным аддитивной постоянной, которую всегда будем полагать равной нулю. Заметим, что для того чтобы можно было положить $\varphi_A = 0$, необходим определенный закон убывания касательной к контуру скорости жидкости $v_s = \vec{v}\vec{e}_s$ при приближении к бесконечно удаленной точке. В частности, для плоского источника в начале координат скорость жидкости убывает вдоль радиуса r как $1/r$, интеграл $\int \frac{dr}{r} = \ln r + C$ не стремится к нулю или постоянной на бесконечности. Однако ниже покажем, что такого вида потенциалы в изучаемых явлениях погружения тел в жидкость не встречаются.

Если контур s, вдоль которого интегрируется касательная скорость v_s, есть жидкий контур, т. е. каждая его точка перемещается в пространстве с теми скоростями, которые имеет жидкость в этой точке, то элементарный компонент потока скорости вдоль этого контура $v_s ds$ с течением времени изменяется как за счет изменения v_s, так и за

счет изменения длины элемента ds [75]. Поэтому

$$\frac{D}{Dt}(v_x dx) = dx\frac{Dv_x}{Dt} + v_x dv_x,$$

так как

$$\frac{D}{Dt}dx = dv_x.$$

Составляя аналогичные выражения по остальным осям, если массовые силы имеют потенциал U и давление P есть функция только плотности ρ, а также учитывая, что из уравнения Эйлера для оси x имеем $\frac{Dv_x}{Dt} = -\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}$, получаем

$$\frac{D}{Dt}(\varphi_B - \varphi_A) = \frac{D}{Dt}\int_A^B v_x dx + v_y dy + v_z dz = \left[-U - \int\frac{dP}{\rho} + \frac{v^2}{2}\right]_H^B. \quad (1.5)$$

Отсюда следует известная теорема Томсона о постоянстве циркуляции по замкнутому жидкому контуру. Действительно, если контур замкнут, точки A и B совпадают, правая часть формулы (1.5) равна нулю. Тогда интеграл в левой части выражает циркуляцию скорости Γ по замкнутому жидкому контуру. Так как $\frac{D\Gamma}{Dt} = 0$, то циркуляция по этому контуру остается постоянной.

Когда область невесомой и несжимаемой жидкости ограничена свободными границами s, представляющими собой жидкую линию и простирающимися в область покоящейся жидкости, где $\varphi = 0$, точку A можно поместить на границе s в удаленной области. Следовательно, $v_A^2/2 = 0$; давление P по всей границе считается постоянным, а потенциал массовых сил при пренебрежении весомостью $U = 0$. Верхний предел интегрирования (1.5) можно связать с определенной частицей жидкости ξ на свободной поверхности s и интеграл в левой части рассматривать как «потенциал частицы ξ». Из (1.5) получим уравнение

$$\frac{D\varphi(\xi, t)}{Dt} = \frac{1}{2}u^2(\xi, t), \quad (1.6)$$

которое является граничным условием для всякой свободной поверхности при оговоренных выше условиях.

Для каждой поверхностной частицы ξ элемент длины ее траектории $ds' = u(\xi, t)\,dt$. Если в точке пространства x_0, y_0, z_0, где частица ξ находилась в момент времени t_0, потенциал был φ_0, но скорость $u_0 \neq 0$, а в момент времени t частица переместилась вместе со свободной границей s и пришла в точку x, y, z, то в этой точке потенциал $\varphi(x, y, z, t)$ или $\varphi(\xi, t)$ (эти два определения вполне эквивалентны вследствие однозначности потенциального поля) определится из уравнения (1.6) интегрированием по времени:

$$\varphi(\xi, t) = \varphi_0(\xi, t_0) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} u^2(\xi, t)\,dt = \varphi_0(\xi, t_0) + \frac{1}{2}\int_{s'_0}^{s'} u(\xi, t)\,ds'. \quad (1.7)$$

Выражением (1.7) в некоторых случаях удобно пользоваться при изучении движения свободных границ.

Если движение жидкости начинается из состояния покоя, то всегда можно положить $\varphi_0 = 0$.

Понимая под ударным возбуждением течения его возникновение в результате приложения больших давлений в течение бесконечно малого интервала времени на некоторой части границы, из уравнения (1.7) получим, что при всяком ударном возбуждении течения идеальной несжимаемой жидкости потенциал скоростей поверхностных частиц за время удара не изменяется.

На твердых границах давление P при ударе может быть сколь угодно велико. Интегрируя выражение (1.5) по времени и учитывая, что длительность удара τ бесконечно мала, а скорость v в интервале интегрирования ограничена, находим

$$\varphi_B - \varphi_A = -\frac{1}{\rho}(P_{iB} - P_{iA}),$$

где $P_i = \int_0^\tau P dt$ — импульсивное давление.

Следовательно, разность потенциалов на концах жидкой линии можно также рассматривать как результат действия разности импульсивных давлений в точках B и A.

§ 3. ПОВЕРХНОСТЬ ПОСТОЯННОГО ПОТЕНЦИАЛА

Потенциал частицы $\varphi(\xi, t)$ на свободной поверхности s возрастает с течением времени (см. (1.7)), но внутри жидкости может существовать близкая к s поверхность σ, на которой потенциал φ сохраняет постоянное значение $\varphi(\sigma) = \text{const}$. Определим скорость распространения поверхности σ. Схема течения показана на рис. 1.2.

Как уже указывалось, на свободной поверхности s линии тока l и траектории s' имеют общую касательную. Пусть δl — малый линейный элемент линии тока, идущий к частице ξ на свободной поверхности s. Пренебрегая величиной $\partial u/\partial l$ вдоль этого элемента, получаем

$$\varphi(\xi, t) - \varphi_\sigma = \int_{\delta l} u(l, t)\,dl = u(\xi, t)\,\delta l$$

при $\delta l \to 0$.

Дифференцируя по времени, находим

$$\frac{D}{Dt}[\varphi(\xi, t) - \varphi_\sigma] = \frac{D}{Dt}(u\delta l) = \frac{Du}{Dt}\delta l + u\frac{D\delta l}{Dt}.$$

Разность скоростей концов элемента δl имеет вид $\frac{D\delta l}{Dt} = u - V_n$, где нормальная скорость распространения поверхности σ обозначена V_η. По определению $\varphi_\sigma = \text{const}$, поэтому из предыдущего получим

$$\frac{D\varphi(\xi, t)}{Dt} = \frac{Du}{Dt}\delta l - u(u - v_\eta).$$

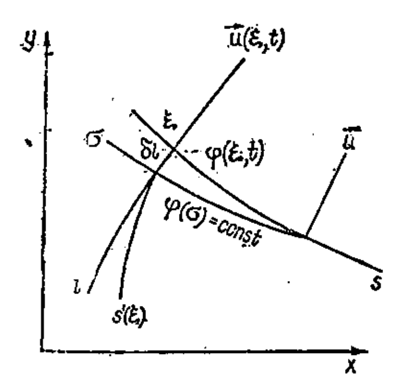


Рис. 1.2. Схема течения со свободной поверхностью.

Сравнивая это выражение с формулой (1.6), находим, что $\frac{Du}{Dt}\delta l + u(u - V_\eta) = \frac{1}{2}u^2$ или $V_\eta = \frac{1}{2}u$, если величина $\frac{Du}{Dt}\delta l \to 0$. Отсюда видно, что бесконечно близкая к свободной поверхности s эквипотенциальная поверхность σ распространяется в ту же сторону, что и s, но со скоростью, в два раза меньшей скорости частиц на s.

Теорема. *Абсолютные скорости распространения эквипотенциальной поверхности, бесконечно близкой к свободной поверхности, распространяющейся с конечными и непрерывными скоростями и ускорениями, одинаково направлены вдоль линии тока, но по величине в два раза меньше скорости поверхностных частиц, находящихся на той же линии тока.*

Из этой теоремы вытекает почти очевидное следствие. Если движение жидкости началось из состояния покоя, то на свободной поверхности, как и везде в жидкости, в начальный момент времени потенциал скоростей равен нулю. В области, близкой к телу, на свободной границе s потенциал скоростей будет изменяться с течением времени (возрастать), но в бесконечно удаленной области свободной границы потенциал φ остается равным нулю. Поэтому поверхность σ, на которой $\varphi = 0$, во все последующие моменты времени на бесконечности всегда бесконечно близко совпадает с первоначальной свободной границей s_0. Так как на больших (но не бесконечно больших) расстояниях от тела подъем поверхности s над первоначальным уровнем s_0 невелик и скорости частиц $\vec{u}$ направлены приблизительно вдоль нормалей к s, можно утверждать, что поверхность $\varphi = 0$, перемещаясь, всегда делит пространство между мгновенным положением s и ее первоначальным положением s_0 на две приблизительно равные части до тех пор, пока расстояние между поверхностями s и s_0 мало в сравнении с перемещением тела, вызывающим движение жидкости. Теорема позволяет построить сетку поверхностей φ и ψ вблизи свободной поверхности s, если заданы сама поверхность и скорость $\vec{u}$ на ней.

§ 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ ВНУТРИ ЖИДКОСТИ

Для точки x, y, z в системе координат, связанной с неподвижной жидкостью, давление P определяется интегралом Коши—Лагранжа

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \int\frac{dP}{\rho} + U = F(t). \qquad (1.8)$$

Для невесомой и несжимаемой жидкости $\int\frac{dP}{\rho} = \frac{P}{\rho}$ и $U = 0$. Если жидкость покоится на бесконечности так, что при $r \to \infty$ частная производная $\frac{\partial\varphi}{\partial t} \to 0$, как и $\varphi \to 0$ (или $\varphi \to \mathrm{const}$), и на все ее свободные границы действует неизменное давление P_0, то функцию $F(t)$ можно считать постоянной величиной, равной P_0/ρ. Тогда уравнение (1.8) упрощается и приобретает вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho}\bigg|_{x,y,z,t} = \frac{P_0}{\rho}\bigg|_{r\to\infty},$$

где $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$, давление P и абсолютная скорость v определяются для неподвижной точки пространства (x, y, z) в тот момент времени t, для которого определено $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$. Очевидно, на свободной поверхности s $P = P_0$, поэтому условие $\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} = 0$ есть другая форма динамического граничного условия, составленного для точек пространства (x, y, z), которые в данный момент времени t совпадают со свободной поверхностью s.

Если потенциал скоростей φ' задан как функция времени t и координат x', y', z' подвижной системы осей, которая движется относительно системы x, y, z, т. е. $\varphi = \varphi(x', y', z', t)$, то для каждой неподвижной точки пространства x, y, z координаты x', y', z' будут функциями времени и потенциал в точке x, y, z будет изменяться как вследствие явной зависимости от времени, так и в связи с изменением координат x', y', z'. Это нужно учесть при вычислении $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ для подстановки в уравнение (1.8).

Предположив, что система x', y', z' совпадает с неподвижной системой x, y, z в рассматриваемый момент времени t и компоненты переносной скорости произвольной точки подвижной системы координат относительно неподвижной есть V_x, V_y, V_z, для бесконечно малых последующих интервалов времени получим $x = x' + V_x t$; $y = y' + V_y t$; $z = z' + V_z t$.

Поскольку $\varphi(x, y, z, t) = \varphi(x', y', z', t)$ из-за однозначности потенциального поля и совпадения координатных осей, то, дифференцируя второе выражение как сложную функцию, получаем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t_{|x,y,z,t|}} = \frac{\partial\varphi}{\partial t_{|x',y',z',t|}} + \frac{\partial\varphi}{\partial x'}\frac{dx'}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial y'}\frac{dy'}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial z'}\frac{dz'}{dt}.$$

В рассматриваемый момент времени имеем $\frac{\partial\varphi}{\partial x'} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$ и аналогично для других направлений; из предыдущего определения координат получим

$$\frac{dx'}{dt} = -V_x; \quad \frac{dy'}{dt} = -V_y; \quad \frac{dz'}{dt} = -V_z.$$

Переносная скорость точки в подвижной системе координат $\vec{V}_l = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}'$, где $\vec{V}_0$ — вектор скорости начала подвижной системы; $\vec{\omega}$ — вектор угловой скорости вращения подвижной системы координат относительно неподвижной; $\vec{r}'$ — радиус-вектор точки в системе x', y', z'. Поэтому переносную скорость точки можно записать в виде

$$\vec{V}_l = \vec{i}V_x + \vec{j}V_y + \vec{k}V_z = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}' = \vec{i}\,[V_{x_0} + (z'\omega_y - y'\omega_z)] + \vec{j}\,[V_{y_0} + (x'\omega_z - z'\omega_x)] + \vec{k}\,[V_{z_0} + (y'\omega_x - x'\omega_y)].$$

Окончательно уравнение для давления, если потенциал скоростей φ задан в подвижной системе координат, при оговоренных выше условиях примет вид

$$\left.\frac{\partial'\varphi}{\partial t}\right|_{x',y',z',t} - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\{V_{x_0} + (z'\omega_y - y'\omega_z)\} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\{V_{y_0} + (x'\omega_z - z'\omega_x)\} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\{V_{z_0} + (y'\omega_x - x'\omega_y)\} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\} + \left.\frac{P}{\rho}\right|_{x',y',z',t} = F(t). \qquad (1.9)$$

Штрих в выражении $\partial'\varphi/\partial t$ означает, что частная производная находится от φ, заданного в подвижной системе координат, а дифференцирование производится при постоянных значениях координат x', y', z'. Считается, что в любой точке свободной границы в каждый момент времени действует одинаковое давление $P - P_0 = \text{const}$.

Если начало неподвижной системы координат связать с частицей ξ на свободной поверхности s в определенный момент времени и одну из осей направить вдоль касательной к траектории s', применив правила определения полной производной, то из уравнения (1.6) получим

$$\frac{D\varphi}{Dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial s'}\frac{\partial s'}{\partial t}.$$

Так как $\frac{\partial\varphi}{\partial s} = u$ и $\frac{\partial s'}{\partial t} = u$, то, подставив эти величины в уравнение (1.6), получим граничное условие, составленное для тех точек пространства x, y, z, которые в рассматриваемый момент времени совпадают с границей. Это условие можно записать как $\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} = 0$, что и было указано выше.

Потенциал частицы $\varphi(\xi, t)$ можно также рассматривать как потенциал, заданный в подвижной системе координат, начало которой все время связано с частицей ξ, и для простоты принять, что направление одной из осей подвижной системы совпадает с касательной к траектории. Формально из уравнения (1.9) получим граничное условие

$$\frac{\partial'\varphi(\xi, t)}{\partial t} - \frac{\partial\varphi}{\partial s'}\frac{ds'}{dt} - \frac{u^2}{2} = \frac{D\varphi(\xi, t)}{Dt} - \frac{u^2}{2} = 0.$$

Эта форма граничного условия эквивалентна уравнению (1.6), так как по определению

$$\frac{D\varphi(\xi, t)}{Dt} = \frac{\partial'\varphi(\xi, t)}{\partial t}.$$

§ 5. ЭНЕРГИЯ ЖИДКОСТИ И ТЕОРЕМА ИМПУЛЬСОВ

Мгновенное значение кинетической энергии жидкости, ограниченной поверхностью Σ, выражается формулой [75]

$$T = -\frac{\rho}{2}\iint_{\Sigma}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\Sigma. \qquad (1.10)$$

Значения φ и $\partial\varphi/\partial n$ в этой формуле относятся к точкам мгновенного положения граничной поверхности Σ в тот момент времени, для которого вычисляется энергия; знаки подобраны так, что положительной считается нормаль, направленная внутрь жидкости. Если жидкость заполняет неограниченное полупространство и ее движение вызвано движущимся на поверхности телом, то в качестве поверхности нужно выбрать свободную границу s, смоченную поверхность тела $s_к$ и какую-либо удаленную в бесконечность от области возмущений поверхность s_∞, которая простирается от свободной поверхности и выделяет рассматриваемую область жидкости.

Оценкой порядка убывания φ и $\partial\varphi/\partial n$ и порядка возрастания поверхности s_∞ с увеличением расстояния до нее доказывается, что интеграл энергии (1.10) по этой поверхности может быть сделан сколь угодно малым, если значение r_∞ достаточно велико. Поэтому в изучаемых случаях интегрирование распространяется только на поверхность $s + s_к = \Sigma$.

Обычно формула (1.10) выводится с помощью теоремы Грина (см. ниже, а также [75]), однако ее можно получить и исходя из простых соображений механики (рис. 1.3). Примем, что область односвязна и движение жидкости в ней потенциально. Следовательно, внутри области Σ нет источников и вихрей и каждая линия тока может идти от одной точки границы к другой. Рассмотрим бесконечно тонкую трубку тока, которая там, где начинается, выделяет на внутренней границе площадь $\delta\Sigma_1$, а абсолютная скорость жидкости в этой точке границы равна v_1; в той точке, где рассматриваемая трубка снова приходит на границу, она выделяет площадь $\delta\Sigma_2$, и скорость жидкости равна v_2. Если обозначить элемент длины трубки тока δl, скорость v и площадь поперечного сечения трубки δF, то кинетическая энергия массы $\rho\delta l\delta F$ будет $(\rho\delta l\delta F)\frac{v^2}{2}$. Уравнение непрерывности дает $v_1\delta\Sigma_1 \times \cos(\widehat{v_1, n_1}) = v\delta F = -v_2\delta\Sigma_2\cos(\widehat{v_2, n_2})$, причем $\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = v_1\cos(\widehat{v_1, n})$; интеграл $\int_1^2 v\,dl = \varphi_2 - \varphi_1$, следовательно, кинетическая энергия жидкости,

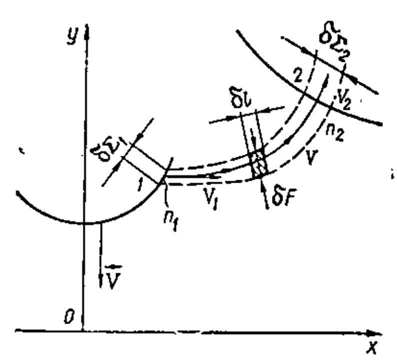


Рис. 1.3. Схема течения и трубка тока.

содержащаяся во всей трубке тока, запишется в виде

$$\frac{\rho}{2}(\varphi_2-\varphi_1)\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\delta\Sigma = -\frac{\rho}{2}\varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\times$$

$$\times\,\delta\Sigma_1 - \frac{\rho}{2}\varphi_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\delta\Sigma_2.$$

Интегрирование по всей поверхности Σ включает поверхности Σ_1 и Σ_2 и формально приводит к (1.10), однако в некоторых случаях бывает удобно пользоваться формулой

$$T = -\frac{\rho}{2}\iint\limits_{\Sigma_1}(\varphi_1-\varphi_2)\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\,d\Sigma, \tag{1.11}$$

где, например, φ_1 и $\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}$ относятся к твердой поверхности, а φ_2 — к концам тех же линий тока, выходящих на свободную поверхность. В этом смысле о (1.11) можно говорить, как об интеграле энергии по трубкам тока.

Для определенной массы жидкости, лишенной трения, энергия выражается формулой

$$\frac{D}{Dt}(T+U) = \iint\limits_{\Sigma} PV_n d\Sigma. \tag{1.12}$$

Здесь поверхность ограничивает часть жидкости неизменной массы, которая двигается вместе с границами Σ, так что сквозь эти границы частицы жидкости не проходят, поэтому V_n — нормальная скорость самих границ области Σ (положительная вдоль внутренней нормали), а P — внешнее давление на эти границы.

Внутренняя энергия U в изучаемых случаях есть потенциальная энергия массовых сил и энергия деформации жидкостей. Для невесомой несжимаемой идеальной жидкости $U=0$.

Так как жидкость несжимаема и поток массы сквозь поверхность отсутствует, объем замкнутой области Σ должен оставаться неизменным и $\iint\limits_{\Sigma} V d\Sigma = 0$. Очевидно, постоянное давление P_0, действующее на все границы Σ, не может изменить кинетическую энергию жидкой массы, поэтому в формуле (1.12) существенно только избыточное давление $P-P_0=\Delta P$.

Так же, как и в § 4, оценкой порядка убывания значений P и V_n с увеличением расстояния от центра возмущений доказывается, что доля интеграла (1.12) по удаленным в бесконечность частям поверхности Σ бесконечно мала.

По условию избыточное давление $P-P_0$ отлично от нуля только на смоченной поверхности тела $s_к$. Если скорость перемещения некоторого центра, фиксированного относительно поверхности тела, есть

$\vec{V}_0$, а угловая скорость вращения тела — $\vec{\omega}$, то нормальная скорость точки $\vec{r}$ поверхности тела будет $\vec{n}(\vec{V}_0+\vec{\omega}\times\vec{r})=V_n$. В формуле (1.12), очевидно,

$$\int\limits_{\Sigma} PV_n ds = \int\limits_{s_к}(P-P_0)\,\vec{n}(\vec{V}_0+\vec{\omega}\times\vec{r})\,ds = \vec{\mathcal{P}}\vec{V}_0 + \vec{M}\vec{\omega},$$

причем $\vec{\mathcal{P}}$ — вектор силы; $\vec{M}$ — вектор момента сил давления на жидкость со стороны поверхности тела $s_к$, приведенных к указанному центру.

Таким образом, из формулы (1.12) для невесомой несжимаемой жидкости ($U=0$) получаем уравнение энергии

$$\frac{DT}{Dt} = \vec{\mathcal{P}}\vec{V} + \vec{M}\vec{\omega}. \tag{1.13}$$

Формула (1.13) выражает закон сохранения энергии — мощность внешних сил равна скорости приращения энергии жидкости. Для несжимаемой невесомой идеальной жидкости вся энергия может иметь форму только кинетической энергии T.

Уравнения (1.12) и (1.13) для идеальной несжимаемой жидкости эквивалентны уравнениям динамики системы материальных точек с идеальными связями. Однако эти связи не всегда голономны. Для части невесомой жидкости, ограниченной поверхностью Σ, движущейся вместе с частицами, теорема импульсов имеет тот же смысл, что и для системы материальных точек, движение которой изучается в курсах теоретической механики. Обозначая главный вектор количества движения и главный вектор момента количества движения всех частиц в области, ограниченной поверхностью Σ, соответственно $\vec{K}$ и $\vec{K}_m$ и полагая также $\vec{e}_n d\Sigma = d\vec{\Sigma}$, получаем

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \iint\limits_{\Sigma}(P-P_0)\,d\vec{\Sigma},\quad \frac{d\vec{K}_m}{dt} = \iint\limits_{\Sigma}(P-P_0)(\vec{r}\times d\vec{\Sigma}). \tag{1.14}$$

Правые части формул (1.14) выражают суммы внешних сил и внешних моментов, действующих на жидкую массу, ограниченную жидкой поверхностью Σ. Эти суммы сводятся к интегралам сил давления и моментов сил давления по поверхности Σ.

Количество движения и момент количества движения жидкости в объеме dQ, который в данный момент времени находится в точке $\vec{r}$, соответственно имеют вид $d\vec{K}=\operatorname{grad}\varphi\rho dQ$ и $d\vec{K}_m=(\vec{r}\times\operatorname{grad}\varphi)\,\rho dQ$. Поэтому для всей рассматриваемой области получим

$$\vec{K} = \rho\iiint\limits_{Q}\operatorname{grad}\varphi dQ,\quad \vec{K}_m = \rho\iiint\limits_{Q}(\vec{r}\times\operatorname{grad}\varphi)\,dQ.$$

На основании теоремы Гаусса — Остроградского имеем

$$\iiint\limits_{Q}\operatorname{grad}\varphi dQ = -\iint\limits_{\Sigma}\varphi d\vec{\Sigma},$$

$$\iiint\limits_Q (\vec{r} \times \operatorname{grad} \varphi)\, dQ = -\iint\limits_\Sigma \varphi (\vec{r} \times d\vec{\Sigma}),$$

где φ — граничное значение потенциала скоростей в рассматриваемый момент времени.

В изучаемых ниже случаях движения тела по поверхности жидкости всегда существуют части свободной границы s и смоченной границы тела $s_к$, на которых скорости движения частиц жидкости велики и с удалением от которых они убывают, стремясь к нулю на бесконечно больших расстояниях от области возмущений. Поэтому будем считать, что замкнутая поверхность Σ состоит из поверхности тела $s_к$, свободной поверхности жидкости s, начинающейся от поверхности тела и уходящей на большие расстояния от него, где поверхность s замыкается бесконечно удаленной частью поверхности Σ, которую обозначим s_∞. Выясним, как в этих случаях следует применять теорему импульсов и какой механический смысл имеют отдельные слагаемые в общих формулах (1.14).

Из теоремы Гаусса — Остроградского следует

$$\vec{K} = \rho \iiint\limits_Q \operatorname{grad} \varphi dQ = -\rho \iint\limits_{s_к+s} \varphi d\vec{s} - \rho \iint\limits_{s_\infty} \varphi d\vec{s} = \vec{B} + \vec{B}_\infty. \quad (1.15)$$

Импульсы внешних сил $\vec{B}$ и $\vec{B}_\infty$ относятся соответственно к поверхностям $s_к + s$ и s_∞ и равны соответствующим интегралам в формуле (1.15). Потенциал скоростей φ определяется из уравнения (1.7) интегрированием по времени t. Предполагая, что движение началось при $t = 0$ из состояния покоя, когда потенциал каждой частицы был равен нулю, получаем потенциал некоторой частицы на ограничивающей поверхности в момент времени t:

$$\varphi = -\frac{P_i}{\rho} + \frac{1}{2}\int\limits_0^t u^2 dt.$$

Здесь импульсивное давление $P_i = \int\limits_0^t (P - P_0)\, dt$.

На бесконечно удаленной части поверхности s_∞ имеем

$$\vec{B}_\infty = -\rho \iint\limits_{s_\infty} \varphi d\vec{s} = \iint\limits_{s_\infty} P_i d\vec{s} - \iint\limits_{s_\infty} \left(\frac{\rho}{2} \int\limits_0^t u^2 dt \right) d\vec{s}. \quad (1.16)$$

Во втором интеграле правой части скорость частиц $\vec{u}$ убывает с ростом расстояния r от центра возмущений не медленнее, чем $1/r^2$, а площадь поверхности s_∞ возрастает как r^2. Следовательно, при произвольных размерах области возмущений в неограниченном полупространстве всегда можно подобрать столь большие расстояния r, что этот интеграл, убывающий не медленнее, чем $1/r^2$, будет сколько угодно мал при произвольном, но конечном времени t.

Из каждой части равенства (1.15) вычтем $\vec{B}_\infty$. В результате получим

$$\vec{K} - \vec{B}_\infty = -\rho \iint\limits_{s_к+s} \varphi d\vec{s} = \vec{B}. \quad (1.17)$$

По первоначальному условию поверхность Σ движется вместе с жидкостью, следовательно, охватывает неизменный объем жидкости. На поверхность Σ действует неизменное давление P_0 и переменное дополнительное давление $P - P_0$, определяемое движением границ. На свободных границах s импульсное давление P_i равно нулю. Интеграл избыточного давления по твердым границам тела сводится к силе

$$\vec{\mathcal{F}} = \iint\limits_{s_к} (P - P_0)\, d\vec{s} = \frac{D\vec{B}}{Dt},$$

с которой тело действует на жидкость. Сила давления на удаленную в бесконечность часть границы с внешней стороны имеет вид $\vec{P}_\infty = \frac{D\vec{B}_\infty}{Dt}$. Таким образом, дифференцируя (1.17), получаем окончательную формулу теоремы импульсов

$$\frac{D}{Dt}(\vec{K} - \vec{B}_\infty) = -\rho \frac{D}{Dt} \iint\limits_{s_к+s} \varphi d\vec{s} = \frac{D\vec{B}}{Dt} = \vec{\mathcal{F}}. \quad (1.18)$$

Величина действительного количества движения $\vec{K}$ всех частиц жидкости в области Σ так же, как и величина импульса сил реакций внешней к Σ части жидкости $\vec{B}_\infty$, зависит от формы удаленной части границ s_∞, в этом смысле они неопределенны. Поэтому вектор «количества движения», или импульс сил давления, приложенных к жидкости через поверхность движущегося на ней тела, определяется из выражения (1.17) и может быть не равен действительному количеству движения всех частиц жидкости.

Аналогично доказывается, что вектор «момента количества движения», или импульсивный момент внешних сил давления на жидкость относительно точки $\vec{r} = 0$, имеет вид

$$\vec{\mathcal{I}}_m = -\rho \iint\limits_{s_к+s} \varphi (\vec{r} \times d\vec{s}) = \int\limits_0^t \Big[\iint\limits_{s_к+s} (P - P_0)\, (\vec{r} \times d\vec{s})\Big]\, dt = \int\limits_0^t \vec{M} dt.$$

Из этого определения также следует

$$\vec{\mathcal{F}} = \iint\limits_\Sigma (P - P_0)\, d\vec{\Sigma}, \quad \vec{M} = \iint\limits_\Sigma (P - P_0)\, (\vec{r} \times d\vec{\Sigma}).$$

Согласно граничному условию (1.6) справедливо равенство

$$\vec{\mathcal{P}} = -\rho \frac{D}{Dt} \iint\limits_{s_к+s} \varphi \vec{ds} = \iint\limits_{s_к} (P - P_0) \vec{ds}.$$

Теорему импульсов в приложениях к установившимся течениям рассмотрим применительно к конкретным задачам.

§ 6. ПОВЕРХНОСТЬ НУЛЕВОГО ПОТЕНЦИАЛА

При всяком погружении твердого тела в первоначально покоящуюся жидкость, для которой в начальный момент времени ($t = 0$) предполагали $\varphi = 0$, для всех ее точек во все последующие моменты времени ($t > 0$) внутри жидкости будет существовать поверхность σ, на которой потенциал скоростей φ в течение всего движения равен нулю. В момент времени $t = 0$ свободная поверхность s является поверхностью, на которой $\varphi = 0$. В последующие моменты времени на поверхности s «накапливаются» положительные потенциалы, поэтому согласно теореме с самого начала поверхность $\varphi = 0$ перемещается в ту же сторону, куда движется поверхность s, и все время будет делить область жидкости, поднявшуюся над первоначальным уровнем, на две части: одна — между s и σ, в которой $\varphi > 0$, и другая, где $\varphi < 0$ (рис. 1.4).

Давление на поверхность σ (где $\varphi = 0$) определяется уравнением (1.9). Так как на поверхности σ имеем $\frac{\partial \varphi'}{\partial t} = 0$, то получим

$$\frac{P_\sigma - P_0}{\rho} = V_\eta v - \frac{v^2}{2}. \qquad (1.19)$$

Когда давление внутри жидкости больше давления P_0 или равно ему, получаем, что нормальная скорость переноса самой поверхности σ есть $V_\eta \geqslant \frac{1}{2} v$, где v — скорость жидкости на поверхности σ. При этом ясно, что скорость $\vec{v} = \operatorname{grad} \varphi$ ортогональна к поверхности σ. Следовательно, при всяком непрерывном погружении тела в первоначально покоящуюся жидкость поверхность σ, на которой $\varphi = 0$, всегда находится внутри жидкости и пересекает поверхность тела или внутренние свободные границы. Последнее положение доказывается такими рассуждениями.

Представим, что из центра области возмущений на свободной поверхности внутри жидкости радиусом $r \to \infty$ проведена полусфера, пересекающая свободную поверхность; по определению на этой полусфере $\varphi \to 0$. Если от линии пересечения полусферы со свободной границей поверхность σ, на которой $\varphi = 0$, проходит так, что не пересекает тело или внутренние свободные границы, то полусфера и поверхность σ ограничат область неподвижной жидкости, следовательно, скорости самой поверхности σ и скорости жидкости на ней будут равны нулю. Тогда поверхность σ будет эквивалентна твердой поверхности, на которой $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$, но может быть $\varphi \neq 0$, что несовместимо с определением поверхности σ и со всей постановкой задачи.

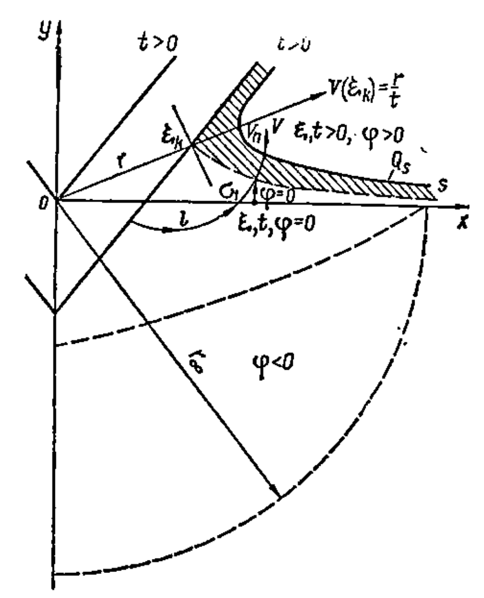


Рис. 1.4. Последовательные положения свободной поверхности при погружении тела.

При вытаскивании тела из покоящейся жидкости (без разрыва сплошности) как на свободной поверхности и поверхности тела, так и везде внутри жидкости возникают положительные потенциалы; поверхность $\varphi = 0$ в этом случае уже вообще не находится внутри жидкости.

Выясним положение максимума давления. Векторное уравнение Эйлера в подвижной системе координат σ, η, связанной с точкой поверхности σ, в плоском случае распадается на два скалярных уравнения

$$v\omega = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \sigma},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v - V_\eta) \frac{\partial v}{\partial \eta} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \eta}.$$

Здесь ω — угловая скорость вращения системы σ, η относительно неподвижной системы координат, которая в рассматриваемый момент времени совпадает с осями σ, η.

В случае, когда $v - V_\eta = 0$, частица $\xi_к$ все время остается на поверхности σ. Если траектория этой частицы прямолинейна и скорость постоянна, получаем $\partial v/\partial t = 0$, $\omega = 0$, следовательно, $\frac{\partial P}{\partial \sigma} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial \eta} = 0$, и частица $\xi_к$ всегда находится в точке максимума давления. Предполагается, что везде внутри жидкости отсутствуют особые точки, избыточное давление положительно, поверхность σ непрерывна, имеет однозначную кривизну и от поверхности тела простирается в бесконечность, где она асимптотически совпадает с первоначальной свободной поверхностью. Этим условиям, в частности, удовлетворяют течения с автомодельными и стационарными свободными границами.

Теорема. *Для равномерных движений с автомодельными или стационарными свободными границами один из максимумов давления всегда находится на поверхности нулевого потенциала в той ее точке, где переносная скорость этой поверхности равна абсолютной скорости жидкости.*

Определим поток массы, импульсов и энергии через поверхность нулевого потенциала. Для определенности рассмотрим случай, когда поверхность σ ($\varphi = 0$) лежит внутри жидкости, а свободная поверхность

двигается наружу и простирается от частицы $\xi_к$ в бесконечность, где она совпадает с невозмущенным уровнем. Зафиксируем на свободной поверхности частицу ξ, к которой подходит линия тока l, ортогональная к поверхности σ и пересекающая ее в точке σ_1 (см. рис. 1.4).

Если объем области, выделенной поверхностями σ, l, s, обозначить Q_s, то, очевидно, $\frac{dQ_s}{dt} = \int\limits_{\sigma_1} (v - V_\eta)\, d\sigma$. Однако предел интегрирования может быть переменной величиной, так как в различные моменты времени линия тока l может пересекать поверхность σ в различных точках.

Приращение количества движения $\vec{B}_\infty$ жидкости в области Q_s происходит вследствие переноса количества движения $\rho\,(v - V_\eta)\, v d\vec{\sigma} dt$ и действия сил давления на поверхность σ, равных $(P_\sigma - P_0)\, d\vec{\sigma} dt$. В результате, воспользовавшись уравнением (1.19), имеем

$$\frac{d\vec{B}_s}{dt} = \rho \int\limits_{\sigma} \frac{v^2}{2}\, d\vec{\sigma} = \vec{\Pi}. \qquad (1.20)$$

Эта формула не учитывает приращение количества движения за счет действия сил давления на поверхность l_1 между σ и s.

Приращение кинетической энергии T_s в области Q_s также складывается из переноса энергии $\rho\,(v - V_\eta)\, \frac{v^2}{2}\, d\sigma dt$ и работы сил давления $(P_\sigma - P_0)\, v\sigma dt$. В результате получим

$$\frac{dT_s}{dt} = \rho \int\limits_{\sigma} V_\eta \frac{v^2}{2}\, d\sigma = E. \qquad (1.21)$$

Во многих случаях погружения тел и их движения по свободной поверхности, пользуясь дополнительными соображениями, можно указать область возможного положения и некоторые особенности поверхности $\varphi = 0$. Тогда использование формул (1.20) и (1.21) иногда дает полезные результаты.

§ 7. ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛЫ ГРИНА

Опуская доказательство [75], формулу Грина для двух произвольных функций φ и φ', которые непрерывны и обладают непрерывными первыми и вторыми производными внутри связной области Q, ограниченной поверхностью Σ, можно выразить уравнениями

$$\iint\limits_{\Sigma} \varphi \frac{\partial \varphi'}{\partial n}\, d\Sigma = -\iiint\limits_{Q} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi'}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \varphi'}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial \varphi'}{\partial z} \right) dxdydz - \iiint\limits_{Q} \varphi \Delta \varphi'\, dxdydz;$$

$$\iint\limits_{\Sigma} \varphi' \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\Sigma = -\iiint\limits_{Q} \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi'}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi'}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dxdydz - \iiint\limits_{Q} \varphi' \Delta \varphi\, dxdydz. \qquad (1.22)$$

Если φ и φ' — потенциалы скоростей двух различных безвихревых движений, то для несжимаемой жидкости $\Delta\varphi = 0$ и $\Delta\varphi' = 0$; вследствие равенства первых интегралов правой части получаем

$$\iint\limits_{\Sigma} \varphi \frac{\partial \varphi'}{\partial n}\, d\Sigma = \iint\limits_{\Sigma} \varphi' \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\Sigma. \qquad (1.23)$$

Рис. 1.5. Схема течения при локальном возмущении.

В случае $\varphi = \varphi'$ и $\Delta\varphi = 0$ каждое из уравнений (1.22), будучи умножено на $-\rho/2$, даст выражение для кинетической энергии жидкости в области Σ через значения φ и $\partial\varphi/\partial n$ на границах (см. (1.10)).

Пользуясь формулой (1.23), можно доказать , что эффект на бесконечности от всякого локального возмущения на свободной поверхности жидкости эквивалентен эффекту от диполя, помещенного в центре возмущения (рис. 1.5).

Ограничимся плоским случаем. В качестве φ' можно взять $\ln r'$, ибо $\ln r'$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta (\ln r') = 0$, если r' — расстояние от точки A (рис. 1.5) до любой точки пространства x, y (как внутри жидкости, так и вне ее). Точка A по условию находится в области I, заполненной жидкостью, следовательно, при интегрировании по границам Σ этой области точку A надо исключить. Это можно сделать, проведя окружность радиусом r_1 вокруг точки A как центра. Тогда доля первого интеграла вдоль этой окружности, если $d\Sigma_1 = r_1 d\omega$, будет $\int\limits_{\omega\to 2\pi} \varphi \frac{1}{r} \times r_1 d\omega \to 2\pi\varphi_A$, когда $r_1 \to 0$, а соответствующая доля второго интеграла равна нулю, так как внутри окружности r_1 нет источников и стоков. Из формулы (1.23) в результате интегрирования только по границам области I можно получить

$$\varphi_A = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Sigma} \varphi \frac{\partial \varphi'}{\partial n}\, d\Sigma + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Sigma} \varphi' \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\Sigma.$$

Функция φ' гармонична как в области I, так и в области II вне жидкости. Следовательно, при вычислении φ_A необходимо считать, что в области II с границей Σ' также существует потенциал φ. Но для

области II точка A будет внешней точкой, для любой точки границы области II значение радиуса r' в точке A конечно, поэтому из формулы (1.23) следует

$$0 = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Sigma'} \varphi \frac{\partial\varphi'}{\partial n'} d\Sigma' + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Sigma'} \varphi' \frac{\partial\varphi}{\partial n'} d\Sigma'.$$

Для вычисления φ_A оба последние выражения нужно сложить. Однако при интегрировании по контуру области II его надлежит обходить в том же направлении, что и контур области I. Но $\partial/\partial n = -\partial/\partial n'$, поэтому, изменив направление обхода контура II на обратное после замены операции $\partial/\partial n'$ на $\partial/\partial n$, для вычисления φ_A можно при интегрировании просто дважды пройти вдоль $s_к + s$. Здесь, как и выше, $s_к$ — границы тела, s — свободные границы, s_∞ — удаленные в бесконечность границы; $\Sigma = s_к + s + s_\infty$. Подставив в интегралы значения φ и $\partial\varphi/\partial n$ на границах области возмущений, получим

$$\varphi_A = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{s_к+s} \varphi \frac{\partial\varphi'}{\partial n} ds + \frac{1}{\pi}\int\limits_{s_к+s} \varphi' \frac{\partial\varphi}{\partial n} ds. \qquad (1.24)$$

В предыдущих формулах опущено интегрирование по окружностям s_∞ и r'_∞. Однако радиусы этих окружностей можно выбирать произвольно большими, так как от их величины, когда $r_\infty \to \infty$, значение φ_A не может зависеть. Поэтому в первом интеграле должно быть $\varphi_\infty \to C\ (=0)$, так как $\partial\varphi'/\partial n \to 1/r_\infty$, $ds_\infty = r_\infty d\omega$; во втором интеграле, поскольку $\varphi'_\infty = \ln r' \to \infty$ при $r_\infty \to \infty$, выражение $\int\limits_{s_\infty} \partial\varphi/\partial n ds \to 0$, причем убывание этого интеграла с увеличением r_∞ должно происходить быстрее, чем возрастание $\ln r_\infty$. Таким образом, положив аддитивную постоянную для φ на бесконечности, равной нулю, можно отбросить интегрирование по всем бесконечно удаленным границам.

Для пространственного случая все рассуждения аналогичны, но в качестве φ' следует взять функцию $1/r'$. Тогда выражение для потенциала в точке A имеет вид

$$\varphi_A = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{s_к+s} \varphi \frac{\partial\varphi'}{\partial n} ds + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{s_к+s} \varphi' \frac{\partial\varphi}{\partial n} ds. \qquad (1.25)$$

Найдем первый член разложения φ в ряд около удаленной в бесконечность точки A.

В плоском случае $r' = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$, где x и y — координаты точки A; ξ и η — координаты контура возмущенной части границ $s_к$ и s. При условии, что для области возмущений $\xi, \eta \ll r$ при $\xi \to \pm\infty$ потенциал $\varphi \to 0$, приближенно имеем

$$r' = r\left(1 - \frac{x\xi}{r^2} - \frac{y\eta}{r^2} + \ldots\right); \qquad \ln r' = \left(\ln r - \frac{x\xi}{r^2} - \frac{y\eta}{r^2} + \ldots\right),$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Так как расстояние r от начала координат x, y до точки A неизменно, получим

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial n} = \frac{x}{r^2}\frac{\partial\xi}{\partial n} - \frac{y}{r^2}\frac{\partial\eta}{\partial n},$$

однако

$$\frac{\partial\xi}{\partial n} = \cos(\widehat{n, x}) \text{ и } \frac{\partial\eta}{\partial n} = \cos(\widehat{n, y}).$$

Подставив эти выражения в формулу (1.24), найдем

$$\varphi_A = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{s_к+s} \varphi\left(\frac{x}{r^2}\cos(\widehat{n, x}) + \frac{y}{r^2}\cos(\widehat{n, y})\right) ds - \frac{1}{\pi}\int\limits_{s_к+s}\left(\frac{x\xi}{r^2} + \frac{y\eta}{r^2}\right) \times$$
$$\times \frac{\partial\varphi}{\partial n} ds.$$

Если течение симметрично относительно оси y, то в симметричных точках $s\cos(\widehat{n, x})$ и ξ равны по величине и противоположны по знаку, а φ и $\partial\varphi/\partial n$ одинаковы. Обозначим θ угол между отрицательной осью y и направлением r, тогда $-\frac{y}{r} = \cos\theta$. Импульс внешней силы, или количество движения жидкости вдоль оси, $B_y = -\rho\int\limits_{s_к+s} \varphi\cos(\widehat{n, y})ds$, а элемент функции тока $d\psi = \frac{\partial\varphi}{\partial n} ds$; в плоском случае получим

$$\varphi_A = \frac{\cos\theta}{\pi r}\left(\frac{B_y}{\rho} + \int\limits_{s_к+s} \eta d\psi\right). \qquad (1.26)$$

Если ось oy является осью симметрии течения, то в пространственном случае, используя формулу (1.25), аналогично найдем

$$\varphi_A = \frac{\cos\theta}{2\pi r^2}\left(\frac{B_y}{\rho} + \int\limits_{s_к+s} \eta d\psi\right). \qquad (1.27)$$

Напомним, что в формулах (1.26) и (1.27) положительными считаются нормаль и нормальная скорость, направленные внутрь жидкости. При силах, действующих на жидкость вдоль отрицательной оси y, импульс $B_y < 0$; интеграл в скобках также меньше нуля.

Интеграл в (1.26) и (1.27) можно называть статическим моментом функции тока относительно невозмущенного уровня.

Теорема. *Эффект всякого локального движения границ полупространства, заполненного жидкостью, на расстояниях, больших области возмущений и больших в сравнении с размерами самой области возмущений, эквивалентен эффекту от соответствующего диполя.*

Например, если на горизонтальной свободной поверхности плавает полупогруженный цилиндр радиуса R, который ударом получает вертикальную скорость V, направленную вниз, компонент импульса

вдоль оси y будет $B_y = -\frac{\pi}{2} R^2 \rho V$ (ось y направлена вверх). В интеграле (1.26) $\eta = -R\cos\theta$; $d\varphi = VR\cos\theta d\theta$, на поверхности s имеем $\eta = 0$. Отсюда

$$\int_{s_к} \eta d\psi = -VR^2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos^2\theta d\theta = -\frac{\pi}{2} R^2 V.$$

Потенциал скоростей в удаленной точке внутри жидкости равен $\varphi = -VR^2 \frac{\cos\theta}{r}$; для φ получается то же выражение, как если бы цилиндр двигался поступательно в неограниченной жидкости.

Ось диполя для несимметричного течения не будет направлена вертикально. Аналогичными рассуждениями можно показать, что момент импульсивных сил на границах при тех же условиях сведется к диполю высшего порядка. Однако эти исследования здесь опустим.

ГЛАВА 2

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ КАВИТАЦИЯ В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Современная гидродинамика, опирающаяся на вычислительную технику, позволяет в принципе решить любую задачу, в частности произвести расчет осесимметричного отрывного обтекания идеальной жидкостью осесимметричных препятствий [2, 11, 37, 41, 80, 141, 148] и др. Можно достаточно строго и подробно изучить всю картину течения, вычислить его необходимые характеристики, проанализировать их зависимость от параметров, определяющих характер течения. К настоящему времени есть немало решений конкретных задач, доведенных до таблиц и графиков, облегчающих пользование полученными результатами. Однако по этим результатам нельзя вывести важные общие закономерности, позволяющие, пусть приближенно, решать практически неограниченный класс инженерных задач. Поэтому приближенные, но хорошо апробированные и зарекомендовавшие себя методы до сих пор находятся в центре внимания исследователей, особенно при решении сложных и прикладных задач. В силу своей простоты они незаменимы во всех инженерных расчетах. Основываясь на них, изложим основные результаты, относящиеся к осесимметричным кавитационным течениям.

§ 1. ВИДЫ КАВИТАЦИИ

В основе явления кавитации лежит разрыв сплошности жидкой среды. Зарождаясь на молекулярном уровне в местах пониженного давления, когда это давление в точке становится ниже некоторого критического значения $P_{кр}$, микроразрывы сливаются в макропузырьки, а последние — в полости, заполненные смесью имеющихся в жидкости растворенных газов и паров. Такие парогазовые полости называются кавернами. Причины образования каверн могут быть различными и в соответствии с ними существуют и различные виды кавитации. Если ее причиной является снижение до критического уровня давления вследствие роста местной скорости течения, то кавитация называется гидродинамической. Если такой причиной явилось понижение давления в результате образования в жидкости волновых полей, кавитация называется акустической. Так, при исследовании кавитационного разрушения металлов широко используют ультразвуковые волны (ультразвуковая кавитация) [69, 99, 100, 117].

Пониженное давление, являясь необходимым условием возникновения кавитации, не всегда может привести к образованию каверн, поскольку чистые капельные жидкости способны выдерживать даже достаточно большие отрицательные давления. Если же в жидкости присутствуют так называемые ядра кавитации в виде микропузырьков, значения критических давлений сильно падают. Хотя в настоящее время и нет четкого теоретического объяснения факта присутствия в жидкостях микропузырьков, однако реальные и специально не очищенные жидкости всегда эти пузырьки содержат. Значит, второе необходимое условие возникновения кавитации в капельных жидкостях, заключающееся в постоянном существовании микропузырьков в качестве ядер кавитации, всегда налицо. Этот факт трудно объяснить потому, что в микропузырьках должны быть большими силы поверхностного натяжения, которые обязаны привести пузырек к схлопыванию. Если же схлопывания почему-либо не происходит, то расширение пузырьков и их слияние в конечном счете приводит к образованию макропузырьков, которые обязательно должны были бы всплывать и уходить из жидкости через свободные поверхности. Казалось бы, нет причин, которые приводили бы к существованию в жидкости ядер кавитации. Однако их наличие свидетельствует о том, что, видимо, причины их постоянного зарождения и развития определяются сложными явлениями на микро- и макроуровнях. Так, иногда образование ядер связано с действием заряженных частиц. В момент схлопывания пузырьков внутри них возникают очень высокие давления и температура, наблюдается слабое свечение.

Если кавитационные зародыши-ядра размером около 10^{-6} см, которые постоянно перемещаются течением, попадают в область достаточно низкого давления, они начинают расти, сливаясь в различного рода пузырчатые структуры. В зависимости от условий течения эти структуры могут формироваться в виде тонкой пленки, тогда каверна существует в форме тонких длинных полос, которые зачастую располагаются группами параллельно друг другу. При этом тонкие пленки не всегда бывают сплошными — в этих случаях говорят о кавитации в виде пятен. Все это — начальная кавитация в пузырьковой или пленочной форме, что характерно для тел вращения.

Если кавитация возникает при обтекании тел, то при некоторых условиях пузырчатые или пленочные кавитационные структуры, сливаясь, могут формировать одну кавитационную полость, размеры которой соизмеримы или больше размеров образовавшего ее тела. Такая стадия называется развитой кавитацией (в иностранной литературе — суперкавитацией). Если каверна замыкается на кавернообразующем теле, то соответствующая стадия развитой кавитации иногда называется частичной.

В кормовой части развитых каверн образуются возвратные течения. В месте смыкания (или замыкания на тело) каверны скорости жидкости весьма большие, но само течение обычно носит нестационарный турбулентный характер. Интенсивность возвратного течения зависит от режима течения и может быть очень высока. Тогда возвратные струи достигают области срыва, а жидкость, которую возвратное течение вносит в каверну, заполняет значительную часть кавитационной полости. Если скорость обтекания увеличивается, то интенсивность возвратных струй падает. На некоторых скоростях они почти не заметны, кавитационная полость становится весьма устойчивой, стенки ее гладки и прозрачны. Нестационарный характер течения в таких случаях проявляется лишь в области смыкания струй.

Необходимо отметить, что развитые каверны легко образуются за телами с острыми и выступающими кромками и наоборот: они трудно образуются за телами с плавными хорошо обтекаемыми обводами. Это связано с характером распределения гидродинамического давления. Если распределение давления можно представить плавно изменяющимися кривыми, значит, резких перепадов давления нет, уровень разряжения невысок и каверна будет образовываться, но точки отрыва менее определенны.

Различают также естественные и искусственные каверны. Такое деление связано со способом их образования. Поскольку с увеличением скорости обтекания степень разряжения за телами обычно растет, то при некоторых определенных скоростях каверны образуются естественным образом за счет микропузырьков, всегда имеющихся в жидкости. Возникающие в таких условиях каверны называют естественными или паровыми, вследствие того, что образуются они обычно при давлениях, близких к давлению насыщенных паров жидкости [69].

Поскольку каверны возникают в результате активной коагуляции парогазовых пузырьков, имеющихся в жидкости при определенном давлении $P_{кр}$, то, вводя в область пониженного давления непрерывный поток газа, каверну можно образовать и при более высоких значениях давления. Такие каверны называются искусственными. Понизить значение $P_{кр}$ можно также, понижая общее давление в жидкости, например, в замкнутых гидротрубах. Если кавитационная полость образуется в потоке с искусственно пониженным общим давлением, кавитационные течения в этих условиях тоже называются искусственными [69, 134].

Естественные и искусственные развитые кавитационные течения в принципе эквивалентны. Простотой образования искусственных каверн объясняется широкое использование методов искусственной кавитации в экспериментах. Основной характеристикой кавитационного потока является число кавитации, к которому можно прийти от интеграла Бернулли, составленного для невесомой, несжимаемой жидкости

$$P_0 + \frac{\rho V_0^2}{2} = P + \frac{\rho V^2}{2},$$

где P, V относятся к точке на поверхности кавитирующего тела, а P_0, V_0 — к какой-либо удаленной точке. Вообще давление P и скорость V на поверхности тела зависят от его формы. Для конкретного тела течение не зависит от абсолютного давления P_0. Давление P_v в паровой каверне есть давление насыщенных паров. Поэтому параметром, оп-

ределяющим течение, является отношение

$$\sigma_v = \frac{P_0 - P_v}{0{,}5\rho V_0^2},$$

которое называется паровым числом кавитации и зависит, как видно, только от значения давления вдали от тела, давления насыщенных паров и скоростного напора. Для заданного тела, образующего каверну-кавитатор, число кавитации однозначно определяет размеры и форму каверны. Поскольку давление в каверне постоянно, то и скорость течения вдоль границы также постоянна. Эту скорость можно определить из уравнения Бернулли. В результате получим

$$V_v = V_0\sqrt{1+\sigma_v}.$$

Мы уже отмечали, что кавитация наступает при достижении давлением P некоторой критической величины, близкой к давлению насыщенных паров. Это значит, что на поверхности обтекаемого тела кавитация наступает там, где давление понижается до величины P_v и соответственно скорость обтекания достигает величины V_v.

Выше было указано, что искусственная кавитация может возникать при давлениях, превосходящих значение P_v, если в область разрежения вдувать газ. Поэтому в общем случае число кавитации выражается формулой

$$\sigma = \frac{P_0 - P_к}{0{,}5\rho V_0^2},$$

где $P_к$ — давление газа в каверне.

§ 2. КАВИТАЦИОННОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Теоретические исследования показывают, а эксперименты подтверждают, что сопротивление кавитирующих тел существенным образом зависит от разности давлений в набегающем потоке и в каверне и от площади наибольшего сечения каверны. Эту весьма важную зависимость можно получить, исходя из простой модели течения и применения к ней теоремы импульсов. Физическая сущность модели течения заключается в следующем. Кавернообразующее тело, движущееся (или обтекаемое жидкостью) с большой скоростью, пронизывает в некоторый фиксированный момент времени $t_0 = 0$ плоскость наблюдения, перпендикулярную скорости движения. В следующий бесконечно близкий к моменту t_0 момент времени $t > t_0$ в плоскости наблюдения образуется отверстие, границе которого кавернообразующее тело сообщает значительные радиальные скорости расширения. Вначале форма отверстия близка к форме сечения срыва струй, в дальнейшем отверстие расширяется по инерции, расходуя полученную от кавитатора кинетическую энергию на преодоление сопротивления жидкости, пропорционального разности давлений $\Delta P = P_0 - P_к$. По мере увеличения отверстия (кольца каверны) скорость расширения падает, в момент времени $t = t_к$ она становится равной нулю и при $t > t_к$ меняет знак: отверстие начинает сужаться, достигнув при $t = t_к$ своих наибольших размеров. В некоторый момент времени, близкий к значению $t = 2t_к$, отверстие в плоскости наблюдения схлопывается, в дальнейшем происходит лишь растекание турбулентного следа, в котором энергия рассеивается в форме тепла [81].

Такая упрощенная модель течения с образованием, развитием и схлопыванием каверны позволяет наглядно понимать процесс образования, развития и исчезновения каверны. Это представление оказывается полезным при различных оценках, применяемых к изучению нестационарной кавитации. Связь сопротивления и размеров каверны можно установить точно, применяя теорему импульсов.

Предположим, что в момент времени $t > 0$ в плоскости наблюдения находится сечение каверны радиусом R. Проведем через это сечение контрольную плоскость Σ_2, перпендикулярную оси каверны. Вторую контрольную плоскость Σ_1, тоже перпендикулярную оси каверны, поместим далеко впереди кавернообразующего тела. Замыкая эти плоскости цилиндрической поверхностью Σ_3, достаточно удаленной от поверхности каверны, получаем контрольную поверхность Σ, внутри которой заключена передняя часть каверны.

В точках контрольной плоскости Σ_1 действует невозмущенное давление P_0, а скорость жидкости в этих точках V_0 параллельна оси каверны.

В точках контрольной плоскости Σ_2 давление P, а скорость имеет составляющие вдоль осей цилиндрической системы координат, связанной с кавернообразующим телом (кавитатором):

$$V_x = V_0 + v_x, \qquad V_y = v_y.$$

На кавитатор действует сила сопротивления W_0 и давления газа в каверне $P_к$. На часть контрольной плоскости Σ_2, равной площади сечения каверны $S = \pi R^2$, будет действовать усилие $SP_к$. Импульс всех сил за единицу времени в проекции на ось x, направленной вдоль оси каверны, равен

$$\int\limits_{\Sigma_1} P_0 d\Sigma - \int\limits_{\Sigma_2 - S} P d\Sigma - W_0 - SP_к.$$

Он равен изменению количества движения. Количество движения элементарного объема на входе в контрольную поверхность равно $\rho V_0^2 d\Sigma$, а на выходе — $\rho\,(V_0 + v_x)^2 d\Sigma$, так как изменились скорости. Следовательно, уравнение теоремы импульсов можно записать в виде

$$\int\limits_{\Sigma_2 - S} \rho\,(V_0 + v_x)^2\, d\Sigma - \int\limits_{\Sigma_1} \rho V_0^2 d\Sigma = \int\limits_{\Sigma_1} P_0 d\Sigma - \int\limits_{\Sigma_2 - S} P d\Sigma - W_0 - SP_к.$$

В это уравнение следовало бы добавить еще интегралы по цилиндрической поверхности Σ_3. Однако подынтегральные выражения содержат множителями возмущенные скорости $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, которые при

$r \to \infty$ убывают как r^{-3}. Это следует из того, что поле возмущенных скоростей вдали от каверны ведет себя так же, как и поле скорости, индуцированное диполем [80].

Уравнение теоремы импульсов можно преобразовать, воспользовавшись уравнением Бернулли. Записанное для точек контрольных плоскостей Σ_1 и Σ_2, оно дает выражение для давления

$$P = P_0 - \rho V_0 v_x - \frac{1}{2}\rho v_r^2,$$

с помощью которого уравнение теоремы импульсов переписывается следующим образом:

$$W_0 = (P_0 - P_к + \rho V_0^2) S - \rho \int\limits_{\Sigma_2 - S} \left(V_0 v_x + \frac{1}{2} v_x^2 - \frac{1}{2} v_r^2\right) d\Sigma.$$

Воспользуемся уравнением неразрывности

$$\int\limits_{\Sigma_1} V_0 d\Sigma = \int\limits_{\Sigma_2 - S} (V_0 + v_x)\, d\Sigma.$$

Преобразовав правую часть

$$\int\limits_{\Sigma_2 - S} (V_0 + v_x)\, d\Sigma = \int\limits_{\Sigma_2} V_0 d\Sigma - SV_0 + \int\limits_{\Sigma_2 - S} v_x d\Sigma,$$

вычислим интеграл

$$\int\limits_{\Sigma_2 - S} v_x d\Sigma = V_0 S,$$

использовав который приходим к такому соотношению для сопротивления:

$$W_0 = (P_0 - P_к) S + \frac{\rho}{2} \int\limits_{\Sigma_2 - S} (v_r^2 - v_x^2)\, d\Sigma. \tag{2.1}$$

Эта формула уже дает главную часть явной зависимости сопротивления кавитирующего тела от разности давлений и площади сечения каверны, но она содержит интегралы от неизвестных величин, значения которых зависят от местоположения сечения. Выражение (2.1) упрощается, если контрольную плоскость Σ_2 провести через миделево сечение каверны. В этом сечении (площадью $S_к$) размеры каверны максимальны, а скорости радиального расширения равны нулю: для принятой модели вся кинетическая энергия, переданная кавитатором окружающей жидкости, израсходована на расширение сечения каверны до величины $S_к$. Следовательно, положив $S = S_к$, получим соотношение

$$W_0 = \Delta P S_к - \frac{\rho}{2} \int\limits_{\Sigma_2 - S} v_x^2 d\Sigma. \tag{2.2}$$

Соотношение (2.2) показывает, что сопротивление кавитирующего тела с присоединенной развитой каверной пропорционально разности давлений в набегающем потоке и каверне и площади миделевого сечения, а также зависит от распределения возмущенной скорости v_x в плоскости $x = x_к$, где $x_к$ — координата миделевого сечения. Расчеты и эксперименты показывают, что интеграл в (2.2) мал в сравнении с первым слагаемым и носит характер поправки. Поэтому закон сопротивления для развитой каверны в невесомой жидкости обычно выражается формулой

$$W_0 = k(\sigma)\, \Delta P S_к = k(\sigma)\, \sigma S_к \frac{\rho V_0^2}{2},$$

где поправочная функция $k(\sigma) \lessapprox 1$.

§ 3. УРАВНЕНИЕ РАДИАЛЬНОГО РАСШИРЕНИЯ КАВЕРНЫ

Уравнением радиального расширения каверны фактически является соотношение (2.1), которое можно, однако, преобразовать к дифференциальному уравнению, определяющему закон расширения каверны. Для этого займемся интегралом от v_r^2. Его можно приближенно вычислить, если заметить, что

$$v_r^2 = v_r v_r \approx v_r \frac{R}{r} \frac{\partial R}{\partial t}.$$

Учитывая, что скорость цилиндрического расширения всегда больше истинной радиальной скорости v_r, т. е. что

$$v_r < \frac{R}{r} \frac{\partial R}{\partial t},$$

можно записать

$$\frac{\rho}{2} \int\limits_{\Sigma_2 - S} v_r^2 d\Sigma = \pi\rho \int\limits_R^\infty v_r^2 r\, dr < \frac{\rho}{2} \frac{\partial S}{\partial t} \int\limits_R^\infty v_r dr.$$

Эту же оценку можно получить и несколько иначе. Поскольку $v_r dr = d\Phi$, интегрируя по частям, имеем

$$\frac{\rho}{2} \int\limits_{\Sigma_2 - S} v_r^2 d\Sigma = \pi\rho \int\limits_R^\infty v_r r\, d\Phi = \pi\rho v_r r \Phi \Big|_R^\infty - \pi\rho \int\limits_R^\infty \Phi\, d(v_r r).$$

Второе слагаемое мало, ибо вблизи каверны $\Phi \sim \ln r$ и, значит, $v_r \sim \frac{1}{r}$, что дает $d(rv_r) \sim 0$. Вдали от каверны $\Phi \sim r^{-2}$ и $d(rv_r) \sim r^{-3}$, поэтому интеграл тоже стремится к нулю. Следовательно, второе слагаемое имеет значение некоторой малой поправки в дополнение к первому, поэтому приближенно можно считать, что

$$\frac{\rho}{2} \int\limits_{\Sigma_2 - S} v_r^2 d\Sigma = \pi k_1 \rho \dot{R} R \Phi(t).$$

Здесь k_1 — некоторый поправочный коэффициент, близкий к единице. С учетом этого соотношения уравнению (2.1) можно придать вид

$$W_0 = \Delta PS - \frac{k_1 \rho}{2} \Phi(t) \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\rho}{2} \int\limits_{\Sigma_1 - S} v_x^2 d\Sigma. \quad (2.3)$$

Интеграл от квадрата возмущенной скорости v_x^2 неоднократно оценивался и тоже оказывался малым [80, 81]. Если ввести коэффициент

$$k(x) = 1 - \frac{\rho}{2\Delta PS} \int\limits_{\Sigma_1 - S} v_x^2 d\Sigma,$$

то оказывается, что он мало отличается от единицы и всегда меньше нее. Поэтому вместо (2.3) можно записать

$$\frac{1}{k(x)} W_0 = \Delta PS - \frac{\rho k_1}{2k(x)} \Phi(t) \frac{\partial S}{\partial t}.$$

Учитывая слабое изменение коэффициента $k(x)$ особенно в средней части каверны, его можно считать постоянным. И если положить $\varkappa = \frac{k_1}{k}$, то имеем

$$\frac{W_0}{k} = \Delta PS - \frac{\varkappa \rho}{2} \Phi(t) \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (2.4)$$

Это и будет искомое приближенное уравнение радиального расширения каверны. В его основе лежит теорема импульсов и потому его можно трактовать как приближенное выражение теоремы импульсов для произвольного сечения каверны. Оно определяет общий закон радиального расширения сечения каверны в некоторой фиксированной плоскости наблюдения, достаточно удаленной от кавитатора и замыкателя. Значение его состоит еще и в том, что оно допускает механическое (энергетическое) толкование. Обозначим E потенциальную энергию, T — кинетическую энергию, а A — работу против силы сопротивления, приходящиеся на единицу длины траектории. Тогда можно видеть, что при потенциальном обтекании кавитатора идеальной жидкостью с образованием каверны изменение потенциальной $\frac{\partial E}{\partial x} = \Delta PS$ и кинетической $\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\varkappa \rho}{2} \Phi(t) \frac{\partial S}{\partial t}$ энергии на единице длины каверны равно работе силы, преодолевающей сопротивление жидкости при перемещении кавернообразующего тела на ту же единицу. Иными словами, уравнение сохранения энергии

$$\frac{\partial}{\partial x}(E + T + A) = 0 \quad (2.5)$$

при наличии силы сопротивления выполняется. Оно может быть использовано для определения площади произвольного поперечного сечения каверны, расположенного не слишком близко от ее концов, если известны сопротивление и потенциал скоростей. Для тонких симметричных каверн, для которых наиболее праведливо уравнение (2.5), потенциал можно выразить через характеристики миделевого сечения. Если обозначить координату миделя $x_к$, s дугу меридиана каверны s и учесть, что $\Phi(x_к) = 0$, то

$$\Phi(x) = -\int\limits_s^{s_к} v_s ds = -\int\limits_s^{s_к} (V_к - V_0 \cos\alpha) = -V_к(s_к - s) + V_0(x_к - x).$$

Здесь α — угол между касательной к меридиану и осью x.

§ 4. ПЛОЩАДЬ МИДЕЛЕВОГО СЕЧЕНИЯ

С помощью уравнения (2.4) можно вычислить площадь любого сечения каверны. Определяя миделево сечение как сечение наибольшей площади и используя необходимое условие существования максимума функции $S(t)$, имеем

$$W_0 = k\Delta PS_к. \quad (2.6)$$

Соотношение (2.6) показывает, что сопротивление кавитирующего тела пропорционально разности давлений в набегающем потоке и каверне и площади миделевого сечения. Коэффициент пропорциональности k обнаруживает слабую зависимость от числа кавитации и его значения лежат в интервале $0{,}875 < k < 1$. Во многих работах принимается $k = 0{,}96$ при $\sigma < 0{,}03$ [80, 130].

Физически коэффициент k означает слабую зависимость сопротивления от распределения возмущенных скоростей вне каверны. Поскольку при вычислении сопротивления имеет значение не само распределение v_x, а интеграл от квадрата этой величины, то конкретные законы распределения $v_x(r)$ не имеют существенного значения, если скорости при $r = R$ (на границе каверны) будут одинаковыми.

При заданном сопротивлении W_0 формула (2.6) может служить для определения площади миделевого сечения каверны. Введем коэффициент сопротивления c_x и площадь сечения срыва $S_н$:

$$W_0 = c_x S_н \frac{\rho V_0^2}{2}.$$

Тогда, заменяя разность давлений через число кавитации

$$\Delta P = \frac{1}{2} \rho V_0^2 \sigma,$$

получаем искомую формулу

$$S_к = S_н \frac{c_x}{k\sigma}. \quad (2.7)$$

Полагая $S_к = \pi R_к^2$ и $S_н = \pi R_н^2$, приходим к формуле для радиуса поперечного сечения каверны в миделе

$$R_к = R_н \sqrt{\frac{c_x}{k\sigma}}. \quad (2.8)$$

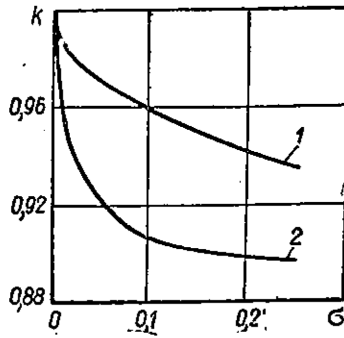


Рис. 2.1. Зависимость коэффициента k от числа кавитации σ, вычисленная по Райхардту (1) и Гузевскому (2).

Все эти формулы относятся к тонким кавернам, однако тела, которые эти каверны образовали, могут быть достаточно произвольными. Здесь только следует иметь в виду, что каверны за телами с острыми кромками описываются этими формулами точнее и в любом случае формулы справедливы в средней части каверны с гораздо большей достоверностью, чем вблизи кавитатора и замыкателя. Они не справедливы в окрестности точек отрыва, а все свойства кавернообразующего тела заключены в коэффициенте сопротивления c_x. Если кавитатор — тонкое тело, $c_x \approx c_{x_0} + \sigma$; если он не является тонким телом, то $c_x = c_{x_0}(1+\sigma)$, причем c_{x_0} — значение коэффициента сопротивления при нулевом числе кавитации. Для кавитатора-диска можно рекомендовать формулу

$$R_к = R_н \sqrt{\frac{0{,}84\,(1+\sigma)}{\sigma}}. \qquad (2.9)$$

Следует подчеркнуть, что многочисленные эксперименты проверки формул (2.7)—(2.9) показали их высокую точность. Формула для площади миделя каверны получена разными учеными, но практически одним и тем же методом.

Райхардт тоже считал, что для малых чисел кавитации $k \approx 1$, но все же путем обработки экспериментов нашел соотношение [69, 99]

$$k = 1 - 0{,}132\sqrt{\sigma}. \qquad (2.10)$$

Вообще следует отметить, что определение значения k из опытов связано с известными трудностями, в особенности на малых скоростях и при малых числах кавитации. За счет весомости воды каверна «всплывает», что приводит к некоторому увеличению ее диаметра. Кроме того, слой воды между свободной поверхностью и каверной играет роль линзы и искажает (преувеличивает) истинные размеры каверны. Возможно, по этим причинам в работе [130] $k \sim 0{,}9$. Поэтому предпочтение следует отдать теоретически полученному соотношению для коэффициента k [37]:

$$k = \frac{1+50\sigma}{1+56{,}2\sigma}. \qquad (2.11)$$

График зависимости $k = k(\sigma)$ по формулам Райхардта и Л. Г. Гузевского приведен на рис. 2.1. Следует помнить, что все формулы приближенные, поэтому зачастую вычислять значения $k(\sigma)$ по зависимостям (2.10) или (2.11) не имеет смысла.

§ 5. ПРОФИЛЬ КАВЕРНЫ

Наиболее просто достаточно точное уравнение профиля осесимметричной каверны можно получить, исходя из общего уравнения радиального расширения сечений каверны (2.4), которое с учетом соотношения (2.6) можно записать в виде

$$\frac{W_0}{k} = \Delta P S_к(t_к) = \Delta P S(t) - \frac{\varkappa\rho}{2}\Phi(t)\frac{\partial S}{\partial t}. \qquad (2.12)$$

Чтобы проинтегрировать это уравнение, необходимо знать потенциал $\Phi(t)$. Точное его определение является чрезвычайно сложной задачей. К тому же само уравнение (2.12) является приближенным и потому можно использовать столь же приближенное значение и потенциала. Его можно определить из интеграла Коши—Лагранжа

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 = \frac{P_0 - P_к}{\rho},$$

в котором значения потенциала вычисляются в неподвижной точке. Как уже упоминалось, в силу симметрии каверны относительно миделевого сечения потенциал в точках контура этого сечения равен нулю. Если следить за расширением поперечного сечения каверны $S(t)$ в некоторой неподвижной плоскости, то точки контура обладают скоростью $\frac{\partial\Phi}{\partial r}$ и перемещаются вдоль r со скоростью $\dot{R}$. Поэтому интеграл Коши—Лагранжа имеет вид

$$\frac{\partial'\Phi}{\partial t} - \dot{R}\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 = \frac{\Delta P}{\rho}.$$

Здесь штрих указывает на то, что потенциал относится к подвижной системе координат, причем $\frac{\partial\Phi}{\partial r} = \dot{R}$. Проинтегрируем это уравнение с учетом того, что $\Delta P = \text{const}$,

$$\Phi(t) = \frac{\Delta P}{\rho}(t - t_к) + \int_t^{t_к}\left[\dot{R}\frac{\partial R}{\partial t} - \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2\right]dt.$$

Первое слагаемое под интегралом, представляющее собой квадрат скорости расширения, мало, а величина в квадратных скобках в миделе равна нулю и является малой на большей части каверны. Можно показать, что [81]

$$\Phi(t) = \frac{\Delta P}{\rho}(t - t_к) - \frac{V_0^2\sigma}{8}(t - t_к) = \frac{\Delta P}{\rho}\left(1 - \frac{\sigma^2}{4}\right)(t - t_к). \qquad (2.13)$$

Видно, что при малых числах кавитации величиной $\frac{\sigma^2}{4}$ можно пренебречь.

Теперь уравнение (2.12) принимает вид

$$\frac{\varkappa}{2}(t-t_к)\frac{\partial S}{\partial t}+(S_к-S)=0$$

и его интегралом служит функция

$$S(t)=S_к+C(t-t_к)^{2/\varkappa}. \qquad (2.14)$$

Постоянную C можно определить из начального условия при $t=0$. В этот момент сечение каверны начало образовываться, иными словами, в плоскость наблюдения вошло сечение срыва. Если его площадь $S(0)=S_н$, то

$$S(t)=S_к\left[1-\left(1-\frac{S_н}{S_к}\right)\left(1-\frac{t}{t_к}\right)^{2/\varkappa}\right]. \qquad (2.15)$$

Перейдем к системе координат, неизменно связанной с кавитатором. Тогда при $x=V_0t$ уравнение (2.15) можно записать следующим образом:

$$\frac{R^2}{R_к^2}+\frac{(x_к-x)^{2/\varkappa}}{b^2}=1.$$

Отсюда следует, что при $\varkappa=1$ это есть уравнение эллипса с полуосями $a=R_к$; $b=\frac{x_к}{\sqrt{1-R_н^2/R_к^2}}$. Сравнение с экспериментами [80] показывает, что величина $\varkappa$ всегда несколько меньше единицы и весьма близка к значению $\varkappa=0{,}85$. Поэтому уравнение (2.15) при $\varkappa\neq1$ будет представлять собой некоторую кривую, близкую к эллипсу, но несколько «полнее» эллипса в начале и в конце. Тем не менее даже при $\varkappa<1$ уравнение (2.15) неудовлетворительно описывает профиль каверны вблизи кавитатора. Мы не касаемся здесь хвостовой части каверны, там вообще уравнение (2.15) теряет смысл. При экспериментах было замечено (и более поздние расчеты это подтвердили), что вблизи кавитатора форма каверны не зависит от числа кавитации и близка к кубической параболе вида

$$R(x)=R_н\sqrt[3]{1+\frac{3x}{R_н}}. \qquad (2.16)$$

Исходя из этого, можно рекомендовать рассчитывать профиль каверны до некоторой точки x_1 по формуле (2.16), а после нее — по (2.15). Естественно, что в точке $x=x_1$ радиусы каверны, вычисленные по формулам (2.15) и (2.16), должны быть равны. Опыты показывают, что формула (2.15) хорошо описывает каверну уже на расстоянии $x=2R_н$ от кавитатора. Приняв эту точку за «точку согласования» двух контуров (2.15) и (2.16), находим, что $R_1=R(x_1)=\sqrt[3]{7}R_н\approx1{,}92\ R_н$. Далее, считаем, что сечение радиусом R_1 является фиктивным кавитатором, с которого срываются струи каверны. Тогда она будет описываться уравнением, аналогичным уравнению (2.15):

$$S(t)=S_к\left[1-\left(1-\frac{S_1}{S_к}\right)\left(1-\frac{t}{t_к}\right)^{2/\varkappa}\right]. \qquad (2.17)$$

Если же в момент $t=0$ в плоскость наблюдения входит сечение срыва кавитатора радиусом $R_н$, то площадь произвольного поперечного сечения каверны с учетом переднего («кубического») участка следует рассчитывать по формуле

$$S(t)=\begin{cases}S_н\left[1+\frac{3V_0t}{R_н}\right]^{2/3}, & t<t_1,\\ S_к\left[1-\left(1-\frac{S_1}{S_к}\right)\left(1-\frac{t-t_1}{t_к-t_1}\right)^{2/\varkappa}\right], & t\geqslant t_1.\end{cases} \qquad (2.18)$$

Видно, что если положить $t'=t-t_1$, получим формулу (2.17).

Весьма похожее (хотя и менее обоснованное) решение для профиля осесимметричной каверны дали Биркгоф и Лумис [11]. Они тоже исходили из законов сохранения энергии при наличии сопротивления среды, однако кинетическую энергию вычисляли, исходя из плоского течения, считая, что вся она передана кольцу жидкости с радиусами: внутренним R и внешним $\psi>R$. Если учесть, что масса элементарного объема жидкости, приходящейся на единицу длины каверны,

$$\Delta m=\rho\Delta S=\rho r\,dr\,d\theta,$$

а скорость радиального расширения

$$v_r=R\dot R/r,$$

то кинетическая энергия кольца каверны запишется в виде

$$T=\frac{\rho}{2}\int_0^{2\pi}\int_R^{\psi}v_r^2r\,dr\,d\theta=\pi\rho R^2\dot R^2\ln\frac{\psi}{R}. \qquad (2.19)$$

Поскольку изменение кинетической и потенциальной энергии равно работе против силы сопротивления W_0, то

$$\pi\rho R^2\dot R^2\ln\frac{\psi}{R}+\pi R^2\Delta P=W_0. \qquad (2.20)$$

Вводя число кавитации σ и коэффициент сопротивления c_x и переходя к координате $x=V_0t$, получаем дифференциальное уравнение

$$2\mu(RR')^2=c_xR_н^2-\sigma R^2, \qquad \mu=\ln\frac{\psi}{R}. \qquad (2.21)$$

Биркгоф и Лумис рекомендуют для ψ выбирать функцию, равную nR, где n — значительно больше единицы. Отсюда сразу можно найти радиус миделевого сечения каверны, поскольку $R'(x)=0$ при $x=x_к$. Следовательно,

$$R_к=R_н\sqrt{\frac{c_x}{\sigma}}. \qquad (2.22)$$

Эта формула совпадает с формулой (2.8) при $k = 1$. Уравнение

$$2\mu (RR')^2 = \sigma (R_к^2 - R^2)$$

можно проинтегрировать и получить выражение для радиуса произвольного поперечного сечения каверны (конечно, при условии, что $\mu = \text{const}$)

$$R^2 = R_к^2 - \left(x \sqrt{\frac{\sigma}{2\mu}} + C\right)^2.$$

Поскольку $R(x_к) = R_к$, то

$$C = -x_к \sqrt{\frac{\sigma}{2\mu}}.$$

Но если потребовать, что $R(0) = R_н$, получим

$$C = \pm \sqrt{R_к^2 - R_н^2}.$$

Сравнивая эти величины (знак выбираем минус), получаем формулу для полудлины каверны

$$L_к = \sqrt{\frac{2\mu}{\sigma}(R_к^2 - R_н^2)} = \frac{R_н}{\sigma}\sqrt{2\mu(c_x - \sigma)}. \qquad (2.23)$$

Теперь уравнение меридиана каверны можно представить в виде

$$R^2(x) = R_к^2 - \frac{\sigma}{2\mu}(x - x_к)^2, \qquad (2.24)$$

либо

$$R^2(x) = R_к^2 - \frac{\sigma}{2\mu}\left(x - \frac{R_н}{\sigma}\sqrt{2\mu(c_x - \sigma)}\right)^2.$$

Недостатком этого решения является наличие в нем параметра μ, определить который в рамках данной теории невозможно, если не вводить каких-либо дополнительных предположений.

§ 6. ДЛИНА КАВЕРНЫ И ЕЕ УДЛИНЕНИЕ

Формулу для длины каверны можно получить из формулы (2.17), записав ее в системе координат, связанной с кавитатором

$$R^2(x) = R_к^2\left[1 - \left(1 - \frac{S_1}{S_к}\right)\left(1 - \frac{x}{x_к}\right)^2\right]. \qquad (2.25)$$

Используем то обстоятельство, что производные от радиуса из формул (2.16) и (2.17) в «точке согласования» должны быть равны. Поскольку

$$R(x)\,R'(x) = \frac{R_к^2}{x_k}\left(1 - \frac{S_1}{S_к}\right)\left(1 - \frac{x}{x_к}\right),$$

$$R(x)\,R'(x) = \frac{R_н^2}{R},$$

то при $x = x_1$ получаем

$$\frac{R_к^2}{x_к}\left(1 - \frac{S_1}{S_к}\right)\left(1 - \frac{x_1}{x_к}\right) = \frac{R_н^2}{R_1}.$$

Учитывая, что $R_к^2 = R_н^2 \frac{c_x}{k\sigma}$, находим

$$\frac{k\sigma x_к}{c_x R_н} = \frac{R_1}{R_н}\left(1 - \frac{S_1}{S_к}\right)\left(1 - \frac{x_1}{x_к}\right) = 1{,}92\left(1 - \frac{3{,}69k\sigma}{c_x}\right)\left(1 - \frac{x_1}{x_к}\right).$$

Если учесть, что полудлину каверны $L_к$ составляет величина $x_к + x_1$, то $x_к = L_к - x_1$, тогда последнее равенство запишется в виде

$$\frac{\sigma L_к}{c_x R_н} = \frac{1{,}92}{k}\left(1 - \frac{x_1}{x_к}\right) - \frac{\sigma}{c_x}\left[7{,}08\left(1 - \frac{x_1}{x_к}\right) - \frac{x_1}{R_н}\right].$$

При малых числах кавитации отношение $\frac{x_1}{x_к}$ мало и в первом приближении им можно пренебречь. Тогда

$$\frac{\sigma L_к}{c_x R_н} = \frac{1{,}92}{k} - \frac{5\sigma}{c_x}. \qquad (2.26)$$

А приближенно приняв $x_1 \approx \sigma x_к$, получим

$$\frac{\sigma L_к}{c_x R_н} = \frac{1{,}92}{k} - \left(\frac{1{,}92}{k} + \frac{5\sigma}{c_x}\right)\sigma + \frac{7}{c_x}\sigma^2. \qquad (2.27)$$

Для диска в работе [8] формуле (2.26) придан вид

$$\frac{\sigma L_к}{R_н} = 1{,}92 - 3\sigma. \qquad (2.28)$$

Заметим здесь, что приближенных формул для определения длины каверны известно несколько. Все они в той или иной степени различны. Так, Л. А. Эпштейн нашел соотношение [134]

$$\frac{\sigma_1 L_к}{R_н} = 1{,}45\sqrt{c_{x_0}}, \qquad (2.29)$$

в котором число кавитации σ_1 учитывает влияние поля силы тяжести:

$$\sigma_1 = \sigma - \frac{h_к}{d_н \mathrm{Fr}^2}.$$

Здесь $d_н = 2R_н$; $\mathrm{Fr}^2 = V_0^2/gd_н$; $h_к$ — искривление оси (всплывание сечения) каверны в миделе.

Для каверны в невесомой жидкости Л. А. Эпштейн рекомендует зависимость [134]

$$\frac{L_к}{R_н} = \frac{1{,}67}{\sigma}\sqrt{\frac{c_{x_0}}{k}}, \qquad (2.30)$$

которая достаточно хороша для диска и тупых конусов. В более позднем исследовании Эпштейн дал еще одну формулу [135]

$$\frac{L_к}{R_н} = \frac{1,3}{\sigma}\sqrt{\frac{c_x}{k}}.$$

Однако она, по нашему мнению, гораздо менее точна и занижает значение полудлины каверны, в особенности при малых числах кавитации.

Райхардт, обрабатывая результаты экспериментов с дисками, конусами и сферами, получил более сложную зависимость полудлины каверны от числа кавитации [69, 99]:

$$\frac{L_к}{R_н} = \frac{(\sigma + 0,008)\sqrt{c_x}}{\sigma\sqrt{\sigma}\,(0,066 + 1,7\sigma)\,k}, \qquad (2.31)$$

а для радиуса миделевого сечения

$$\frac{R_к}{R_н} = \sqrt{\frac{c_x}{k\sigma}}.$$

Здесь коэффициент k определяется выражением

$$k = 1 - 0,132\sqrt{\sigma}. \qquad (2.32)$$

Как было показано, Биркгоф и Лумис для основных размеров каверны получили соотношения

$$\frac{R_к}{R_н} = \sqrt{\frac{c_x}{\sigma}}; \quad \frac{L_к}{R_н} = \sqrt{\frac{2\mu\,(c_x - \sigma)}{\sigma}}.$$

Имея выражения для радиуса миделевого сечения и полудлины каверны, можно получить следующие формулы для удлинения:

по Г. В. Логвиновичу

$$\Lambda = \frac{1,92 - 3\sigma}{\sqrt{k\sigma c_x}};$$

по Л. А. Эпштейну

$$\Lambda = \frac{1,67}{\sqrt{\sigma\,(1+\sigma)}};$$

по Биркгофу

$$\Lambda = \sqrt{\frac{2\mu}{\sigma}\left(1 - \frac{\sigma}{c_x}\right)}; \quad \mu = \ln n.$$

Относительно последнего соотношения надо сказать, что оно не очень хорошо соответствует экспериментам, если выбирать n не зависящим от этого удлинения. Если же выбрать n такое, что $n = \chi\Lambda$, то из предыдущего выражения для Λ при $\sigma \ll c_x$ получим

$$\sigma = \frac{2\ln\chi\Lambda}{\Lambda^2}. \qquad (2.33)$$

Постоянная χ, вообще говоря, зависит от числа кавитации и ее выбор определяет степень соответствия экспериментам. Ниже будет показан характер этой зависимости, а пока ограничимся упоминанием, что такую же зависимость $\sigma = \sigma(\Lambda)$ нашел В. В. Серебряков [110] и установил, что $\chi \approx 0,605$. В самом же деле это значение постоянной χ является лишь нулевым приближением, которое оказывается достаточно точным лишь при весьма малых значениях числа кавитации.

Подобную формулу получил также О. Г. Тайц, с той лишь разницей, что найденная им постоянная $\chi = 0,54$.

§ 7. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ТОНКИХ ТЕЛ

Аппроксимацию каверны тонким телом и представление обтекания последнего с помощью обтекания гидродинамических особенностей, распределенных на оси каверны, использовали многие исследователи, но начало было положено С. С. Григоряном [36]. Используя асимптотическое представление потенциала, справедливое вблизи оси каверны,

$$\Phi(x, r, t) = -2g(x, t)\ln r + \ldots \qquad (2.34)$$

и выделяя главные слагаемые в кинематическом и динамическом условиях на границе каверны, он получил для определения квадрата радиуса каверны следующее дифференциальное уравнение:

$$2u\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\ln u + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 = 4\sigma u, \quad u = \frac{R^2}{L^2}. \qquad (2.35)$$

Все производные по координате x, входившие в кинематическое и динамическое условия, выпали из этого уравнения, ибо относились к слагаемым более высокого порядка малости. Следовательно, от координаты x функция $u(x, t)$ зависит, как от параметра. Иными словами, уравнение (2.35) описывает расширение каверны в плоскости $x = \mathrm{const}$, потому этот процесс и зависит от условий только в данной плоскости.

Уравнение (2.35) можно привести к уравнению в полных дифференциалах, если умножить правую и левую части на $\frac{\partial u}{\partial t}$ и разделить на u,

$$2\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\ln u + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{1}{u}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 = 4\sigma\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Можно видеть, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\ln u\right] = 4\sigma\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Интегрируя в пределах от t до $t_к$, получаем

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\ln u = 4\sigma(u - u_к). \qquad (2.36)$$

Здесь использованы те условия, что

$$u\big|_{t=t_к} = u_к; \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=t_к} = 0.$$

Поскольку далее

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \pm \sqrt{\frac{4\sigma(u-u_{\text{к}})}{\ln u}},$$

то связь между u и t находится через интеграл

$$\int \sqrt{\frac{\ln u}{u-u_{\text{к}}}}\, du = \pm\, 2\sqrt{\sigma}\,(t + C(x)). \quad (2.37)$$

Постоянную $C(x)$ можно определить из условия при $t = 0$ (или $t = t_{\text{к}}$).

В средней части каверны $\ln u \approx \ln u_{\text{к}}$. При этом допущении интеграл в левой части уравнения (2.33) можно вычислить

$$\sqrt{(u-u_{\text{к}})\ln u_{\text{к}}} = \pm \sqrt{\sigma}\,(t + C(x)).$$

Отсюда видно, что при $t = t_{\text{к}}$ $C(x) = -t_{\text{к}}$ и, следовательно,

$$\sqrt{(u-u_{\text{к}})\ln u_{\text{к}}} = \pm \sqrt{\sigma}\,(t - t_{\text{к}})$$

или, разрешив это уравнение относительно функции u,

$$u(t) = u_{\text{к}} + \frac{\sigma}{\ln u_{\text{к}}}\,(t - t_{\text{к}})^2.$$

Поскольку при $t = 0$ $u = u_{\text{н}}$, то

$$u_{\text{к}} - u_{\text{н}} = \frac{\sigma t_{\text{к}}^2}{-\ln u_{\text{к}}} \quad (2.38)$$

и уравнение для u приводится к уже привычному виду

$$u(t) = u_{\text{к}}\left[1 - \left(1 - \frac{u_{\text{н}}}{u_{\text{к}}}\right)\left(1 - \frac{t}{t_{\text{к}}}\right)^2\right]. \quad (2.39)$$

Если в качестве линейного масштаба, применяемого при получении безразмерных величин, используется полудлина каверны $L_{\text{к}}^*$ (звездочка обозначает размерные величины), то

$$t_{\text{к}} = \frac{V_0^* t_{\text{к}}^*}{L_{\text{к}}^*} = \frac{x_{\text{к}}^*}{L_{\text{к}}^*} \approx 1,$$

тогда соотношение (2.38) можно записать через удлинение каверны

$$\left(\frac{1}{\Lambda^2} - \frac{R_{\text{н}}^2}{L_{\text{к}}^2}\right)\ln \Lambda^2 = \sigma.$$

Второе слагаемое всегда мало и его можно опустить, но чтобы не нарушалось равенство, введем под знак логарифма множитель $\chi < 1$. При этом сама величина χ в принципе должна была бы зависеть от числа кавитации и коэффициента сопротивления, поскольку от этих параметров зависит полудлина. Тогда получается та же зависимость $\sigma(\Lambda)$,

которая вытекает и из теории Биркгофа

$$\sigma = \frac{2\ln \chi\Lambda}{\Lambda^2}. \quad (2.40)$$

Для определения постоянной χ нет дополнительных условий и потому в рамках этой теории тоже приходится прибегать к сравнению с экспериментами. Поскольку, однако, функция логарифма является медленно меняющейся величиной, его можно заменить постоянной. Если $10 < \Lambda < 20$, т. е. каверна достаточно вытянута, то $\ln \chi\Lambda \approx 2$ и из соотношения (2.40) следует приближенная связь числа кавитации с удлинением

$$\Lambda = \frac{L_{\text{к}}}{R_{\text{к}}} \approx \frac{2}{\sqrt{\sigma}}. \quad (2.41)$$

Если обратиться к выражению для удлинения, полученному в рамках энергетического подхода Логвиновича, то

$$\Lambda = \frac{1{,}92 - 3\sigma}{\sqrt{c_{x_0}(1+\sigma)\sigma}}, \quad (2.42)$$

откуда и видно, что соотношение (2.41) следует из соотношения (2.42), если $\sigma \to 0$.

Сравнивая решения задачи об отрывном осесимметричном обтекании тел вращения, полученные в рамках методов Логвиновича, Биркгофа и Григоряна, видим, что они приводят к одним и тем же результатам относительно формы профиля каверны и ее удлинения. Что касается основных размеров каверны, то наилучшее приближение к опытным данным обеспечивает теория Логвиновича и Биркгофа. Теория Григоряна не позволяет найти хорошее выражение для площади миделевого сечения, что подтверждают непосредственные расчеты [97].

Уравнение С. С. Григоряна было дополнено Ю. Л. Якимовым, который частично учел влияние на каверну кавитатора и замыкателя [138]. Если обозначить x_0 и x_1 координаты начала и конца кавитатора, а x_2 — координату смыкания струй, то для функции u можно получить следующее уравнение:

$$u''\ln u + \frac{(u')^2}{2u} - 2\sigma = -\frac{4g(x_0,t)}{(x-x_0)} - 4\int_{x_0}^{x_1}\frac{g'(\xi,t)\,d\xi}{(x-\xi)} - 4\int_{x_2}^{\infty}\frac{g'(\xi,t)\,d\xi}{(x-\xi)},$$

в котором штрих обозначает производную по переменной x, а $g(x,t)$ — плотность распределения особенностей в представлении для потенциала, связанная с функцией u соотношением

$$g(x,t) = -\frac{1}{4}\,\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Если течение стационарно, интегралы можно вычислить и для каверны за тонким конусом, замыкающейся на такой же конус, получить

уравнение вида

$$u''\ln u+\frac{(u')^2}{2u}-2\sigma=\frac{2u(x_1)}{(x_1-x_0)^2}\ln\frac{x-x_0+\sqrt{(x-x_0)^2+u}}{x-x_1+\sqrt{(x-x_1)^2+u}}+$$

$$+\frac{2u(x_2)}{(x_3-x_2)^2}\ln\frac{x_3-x+\sqrt{(x_3-x)^2+u}}{x_2-x+\sqrt{(x_2-x)^2+u}}. \qquad (2.43)$$

Ясно, что при одинаковых кавитаторе и замыкателе

$$\frac{u(x_1)}{(x_1-x_0)^2}=\frac{u(x_2)}{(x_3-x_2)^2}=\mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2}, \qquad (2.44)$$

где γ — угол раствора конуса, а, кроме того,

$$u'(x_1)=-u'(x_2)=2R_н\,\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}. \qquad (2.45)$$

Ряд расчетов по уравнению (2.43) выполнили Э. В. Парышев и В. Н. Рыков [97], которые, обозначая правую часть уравнения (2.43) $f(x, u)$, записали его в виде

$$u''=F(x,u,u',\sigma), \qquad (2.46)$$

где

$$F(x,u,u',\sigma)=\frac{1}{\ln u}\left[-\frac{(u')^2}{2u}+2\sigma+f(x,u)\right]. \qquad (2.47)$$

Уравнение (2.46) можно один раз проинтегрировать и в дальнейшем иметь дело с уравнением первого порядка

$$u'(x)=u'(0)+\int_0^x F(x,u,u',\sigma)\,dx. \qquad (2.48)$$

Это уравнение довольно успешно решается методом последовательных приближений. Если в правую часть уравнения (2.48) вместо $u(x)$ подставить решение С. С. Григоряна как нулевое приближение $u_0(x)$, то получим приближенное выражение производной первого приближения

$$u_1'(x)=u_0'(0)+\int_0^x F(x,u_0,u_0',\sigma)\,dx. \qquad (2.49)$$

Поскольку в миделе каверны (при $x=x_к$) производная равна нулю, то уравнение

$$u_0'(0)+\int_0^x F(x,u_0,u_0',\sigma)\,dx=0 \qquad (2.50)$$

может служить для определения первого приближения значения полудлины каверны $x_к^{(1)}$ при заданном числе кавитации σ. Интегрируя уравнение (2.49) еще раз, находим значение $u_1(x)$. Заменяя в (2.49) u_0 на u_1, определяем $u_2(x)$ и $x_к^{(2)}$ и т. д. Процесс последовательных приближений оказывается быстро сходящимся: два-три приближения уже решают задачу. Э. В. Парышев и В. И. Рыков в своих расчетах задавали не число кавитации, а полудлину $x_к$ и из уравнения (2.50) находили число кавитации σ, использовав которое в уравнении (2.49), определяли $u_1'(x)$ и $u_1(x)$. Если известно число кавитации и необходимо вычислять полудлину каверны, приходится решать уравнение (2.50), в которое искомая величина входит пределом интегрирования. Здесь сложность задачи зависит от вида функции $F(x, u, u', \sigma)$. Когда функция такова, что интеграл может быть взят в конечном виде, задача определения полудлины $x_к$ упрощается. Если же интеграл вычислить не удается, то можно рекомендовать, например, метод Ньютона. Обозначая левую часть уравнения (2.50) $Q_0(x_к)$, получаем

$$Q_0(x_к)=0. \qquad (2.51)$$

Нулевое приближение корня обозначим $x_{к0}^{(0)}$; его можно найти, зная u_0. Предположим, что функция $Q_0(x_к)$ дифференцируема в точке $x_к^{(0)}$. Тогда функцию $Q_0(x_к)$ можно разложить в окрестности точки $x_{к0}^{(0)}$ в ряд Тейлора и, ограничившись линейным приближением, получить

$$Q_0(x_{к0}^{(0)})+Q_0'(x_{к0}^{(0)})(x_к-x_{к0}^{(0)})=0.$$

Корень этого уравнения будет первым приближением к корню уравнения (2.47)

$$x_{к0}^{(1)}=x_{к0}^{(0)}-\frac{Q_0(x_{к0}^{(0)})}{Q_0'(x_{к0}^{(0)})}.$$

Аналогично находятся более высокие приближения

$$x_{к0}^{(i+1)}=x_{к0}^{(i)}-\frac{Q_0(x_{к0}^{(i)})}{Q_0'(x_{к0}^{(i)})},\quad i=1,2,\ldots \qquad (2.52)$$

Ясно, что этот метод применим при условии $Q_0'(x_{к0}^{(i)})\neq 0$. Учитывая специфику уравнения (2.46), видим, что

$$Q_0'(x_{к0}^{(i)})=F(x_{к0}^{(i)}u_0,u_0',\sigma),$$

и потому вместо формулы (2.52) для вычисления корня получаем

$$x_{к0}^{(i+1)}=x_{к0}^{(i)}-\frac{Q_0(x_{к0}^{(i)})}{F(x_{к0}^{(i)},u_0,u_0',\sigma)}. \qquad (2.53)$$

Наконец, когда найдено значение $x_{к0}$ корня уравнения (2.50) с соответствующей точностью, вычислим (опять же по формуле (2.50)) значения $u_1'(x)$ и $u_1(x)$. По этим значениям затем строим уравнение для второго приближения

$$u_2'(x)=u_1'(0)+\int_0^x F(x,u_1,u_1',\sigma)\,dx. \qquad (2.54)$$

Это уравнение снова используется для нахождения методом Ньютона уточненного значения сначала полудлины каверны и затем значений $u_2'(x)$ и $u_2(x)$. По аналогии с уравнением (2.46) имеем

$$u_1'(0) + \int_0^{x_к} F(x, u_1, u_1', \sigma)\,dx = 0$$

и, следовательно,

$$x_{к1}^{(i+1)} = x_{к1}^{(i)} - \frac{Q(x_{к1}^{(i)})}{F(x_{к1}^{(i)}, u_1, u_1', \sigma)}.$$

При этом в качестве $x_{к1}^{(0)}$ можно взять значение $x_{к0}^{(i+1)}$.

Этот подход, т. е. когда при заданном числе кавитации определяется полудлина, более громоздок, чем подход, когда по заданной полудлине находится число кавитации, однако он более физичен.

Выше мы говорили, что в качестве нулевого приближения можно взять решение С. С. Григоряна (2.35), упростив его, считая кавитатор малым. Тогда

$$u_0(x) = \frac{u_к x}{x_к}\left(2 - \frac{x}{x_к}\right),$$
$$u_0'(x) = \frac{2u_к}{x_к^2}\left(1 - \frac{x}{x_к}\right). \qquad (2.55)$$

Связь между числом кавитации и характеристиками миделевого сечения в этом случае записывается в виде

$$\sigma x_к^2 = -u_к \ln u_к.$$

Переходя в уравнении (2.55) к радиусу сечения, имеем

$$R = R_к\sqrt{1 - \left(1 - \frac{x}{x_к}\right)^2} = R_к\sqrt{\frac{x}{x_к}\left(2 - \frac{x}{x_к}\right)}.$$

Это — уравнение каверны, образовавшейся за кавитатором с бесконечно малым сечением срыва. Предположим, что кавитатор радиуса $R_н$ находится в сечении $x = x_*$. Тогда координату этого сечения определим уравнением

$$\left(\frac{x_*}{x_к}\right)^2 - 2\left(\frac{x_*}{x_к}\right) + \frac{R_н^2}{R_к^2} = 0.$$

Учитывая малость кавитатора, получаем

$$\frac{x_*}{x_к} \approx \frac{R_н^2}{2R_к^2} = \frac{k\sigma}{2c_x}.$$

Уравнение каверны, сечение срыва струй у которой находится не в начале координат, а при $x = x_*$, запишется в виде

$$\frac{R}{R_к} = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{R_н^2}{R_к^2}\right)\left(1 - \frac{x - x_*}{x_к - x_*}\right)^2}.$$

Отсюда видно, что если $x_* \ll x_к$, то в средней части каверны слагаемым x_* можно пренебречь, тогда придем к известной формуле (2.35). Иными словами, обе формулы одинаково хороши в средней части каверны и плохо описывают поведение ее границы, особенно кривизны вблизи кавитатора.

Для сравнения возьмем два примера. Каверна за диском при $\sigma = 0{,}05$ ($x_к = 35R_н$) в сечениях $x/R_н = 2$; 10; 30 характеризуется радиусами $R/R_н = 1{,}68$; 3,01; 4,15. Это расчет по формуле (2.35) Более точный расчет Л. Г. Гузевского дает значения: $R/R_н = 2{,}1$; 3,2; 4,20. Аналогично у каверны за конусом с углом раствора $\gamma = 45°$ при $\sigma = 0{,}1$ $\left(\frac{x_к}{R_н} = \frac{2\sqrt{c_{x_0}}}{\sigma} = 10\right)$ значения радиусов, рассчитанных по формуле (2.35), в сечениях $x/R_н = 4$; 6, 8 будут: $R/R_н = 1{,}08$, 1,64, 1,78. В то же время расчет по Л. Г. Гузевскому дает $R/R_н = 1{,}65$; 1,75; 1,85. Таким образом, можно утверждать, что при $0{,}5 < x/x_к < 1{,}5$ формулы типа (2.35) достаточно хорошо аппроксимируют поведение меридиана каверны. Для каверны за диском и конусами с тупыми углами раствора эта «средняя часть каверны» еще более расширяется. Так же расширяет диапазон «средней части каверны» и формула Г. В. Логвиновича (2.17). Удовлетворительные результаты она дает на интервале $0{,}25 < \frac{x}{x_к} < 1{,}75$. Следовательно, когда речь идет о средней части каверны, то надо понимать ту ее часть, которая расположена к кавитатору не ближе, чем на четверть полудлины каверны.

В заключение параграфа упомянем о последних работах Ю. Л. Якимова [139—141], имеющих непосредственное отношение к рассматриваемой теме. Изучая условия, позволяющие отбирать физически реальные решения, которые описывают установившиеся потенциальные течения идеальной несжимаемой жидкости, Якимов [139] рассматривал течения при малых начальных давлениях и больших скоростях (течения с кавитацией). Он показал, что в отличие от его более ранних работ можно получить решение задачи об отрывном обтекании осесимметричного тела потенциальным потоком идеальной жидкости, обладающее необходимыми асимптотиками на бесконечности. Более подробно этот вопрос развит в работах [140, 141], где получены уравнения задачи об осесимметричном срывном обтекании тонкого тела, учитывающие влияние концов каверны и обеспечивающие необходимую асимптотику на бесконечности. В отличие от уравнения, приведенного в [138], в стационарном случае имеем

$$\frac{1}{4}u_{xx}\ln\lambda + \frac{1}{8}\frac{u_x^2}{u} - \frac{u_x}{4\sqrt{(x - x_1)^2 + 2u}} +$$
$$+ \frac{u_x}{4\sqrt{(x_2 - x)^2 + 2u}} = \frac{\sigma}{2} - F_x.$$

Здесь F_x — потенциал особенностей, распределенных по кавитатору;

λ — функция, связанная с искомой функцией u и при условии $1 \ll \ll \ln \lambda$ аппроксимирующаяся выражением

$$\lambda \approx \frac{4u(x_2 - x_1)^2}{[x - x_1 + \sqrt{(x - x_1)^2 + 2u}]\,[x_2 - x + \sqrt{(x_2 - x)^2 + 2u}]}.$$

В этих двух формулах использованы безразмерные величины, в которых в качестве линейного масштаба принимается величина $2\sqrt{c_x}R_н^*$.

Влияние концов каверны (кавитатора и замыкателя) отражают два последних слагаемых левой части уравнения и, кроме того, функция λ. В настоящее время Ю. Л. Якимову удалось вычислить первый интеграл этого уравнения и получить формулы для площади миделя каверны и ее длины. Заметим, что в работе [139] Ю. Л. Якимов нашел также уравнение, описывающее форму тонкой каверны с учетом сжимаемости жидкости. Оно отличается от приведенного выше лишь наличием множителя $1 - M^2$ (M — число Маха) при втором слагаемом.

Приведенное выше уравнение справедливо для всей длины каверны (конечно, в рамках той теории и тех допущений, в которых оно получено). Если рассмотреть его в точке интервала $(x_1 + \Delta x,\ x_2 - \Delta x)$ и выбрать Δx таким, чтобы величина F_x оказалась пренебрежимо малой, то тогда в системе координат, связанной с точкой x_1 при $x_2 = 2L$, получим уравнение вида

$$\frac{1}{4} u_{xx} \ln \frac{uL^2}{x^2 (2L - x)^2} - \frac{u_x}{4x} + \frac{u_x}{4(2L - x)} + \frac{1}{8} \frac{u_x^2}{u} = \frac{\sigma}{2}.$$

Можно показать, что оно эквивалентно более простому уравнению

$$\frac{d}{dx}\left[u_x^2 \ln \frac{uL^2}{x^2 (2L - x)^2}\right] = 4\sigma u_x,$$

из которого следует, что

$$u_x^2 \ln \frac{x^2 (2L - x)^2}{uL^2} = C - 4\sigma u.$$

Поскольку в миделевом сечении $u_x = 0$, то $C = 4\sigma u_к$ и уравнение для формы каверны преобразуется к следующему:

$$u_x^2 \ln \frac{x^2 (2L - x)^2}{uL^2} = 4\sigma (u_к - u). \qquad (2.56)$$

Сравнивая это уравнение с уравнением С. С. Григоряна в форме (2.36), видим, что отличаются они видом функции, стоящей под знаком логарифма. В миделе каверны обе они оказываются равными относительной площади миделевого сечения, однако по мере приближения к концам каверны расхождение будет расти.

Из рассмотрения асимптотик решения при $\sigma \to 0$ Ю. Л. Якимов пришел к формуле для вычисления площади миделевого сечения в виде $u = (4\sigma)^{-1}$ или, если перейти к размерным величинам, $S^* = S_н^* \frac{c_x}{\sigma}$. Иными словами, для площади миделевого сечения он получил выражение, которое следует из теории Биркгофа или из решений

Г. В. Логвиновича при $k = 1$. Но поскольку из решения Г. В. Логвиновича со всей очевидностью имеем $k < 1$, отсюда вытекает, что и уравнение (2.56), как и те, из которых оно получено, является приближенным в той же мере, как и уравнения Г. В. Логвиновича, хотя начало и конец каверны они должны описывать лучше.

§ 8. МЕТОД ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Попытки применения этого метода к решению задач осесимметричной кавитации предпринимались многими исследователями, однако наиболее существенные результаты к настоящему времени получены Л. Г. Гузевским [37—39], Э. Л. Амроминым и А. Н. Ивановым [2, 3, 55]. В работах Гузевского эти методы доведены до высокой степени совершенства во всех звеньях исследовательского процесса: получение разрешающих уравнений, разработка и реализация вычислительных алгоритмов и анализ результатов. Особую ценность представляет богатый фактический материал в виде таблиц, графиков и упрощенных зависимостей. В настоящее время это наиболее точные результаты, охватывающие широкий круг кавитационных течений. Учитывая важность и практическую ценность результатов Гузевского в осесимметричной кавитации, приведем ряд графических зависимостей, имеющих место в течениях за кавитирующими дисками и конусами.

Если зависимость между сопротивлением, разностью давлений и площадью миделевого сечения записать в виде

$$W_0 = k\Delta P S_к$$

и отнести сопротивление к площади миделевого сечения

$$W_0 = c_к S_к \frac{\rho V_0^2}{2},$$

то для коэффициента сопротивления по площади миделя $c_к$ получим выражение

$$c_к = k\sigma,$$

показывающее, что этот коэффициент сопротивления пропорционален числу кавитации. Учитывая, что $k \approx 0{,}96$, говорим, что практически коэффициент сопротивления по площади миделя равен числу кавитации. Это чрезвычайно важная зависимость, ибо она свидетельствует о том, что с уменьшением числа кавитации снижается и сопротивление. При этом весьма важно и то, что этот коэффициент сопротивления не зависит от формы тела. Все эти выводы, полученные из простейшей теории Г. В. Логвиновича, нашли блестящее подтверждение в точной теории Л. Г. Гузевского. На рис. 2.2 сплошная линия

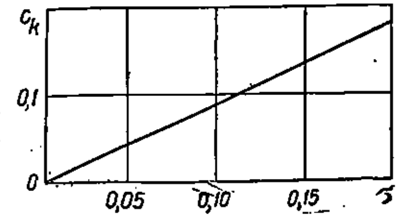


Рис. 2.2. Зависимость коэффициента сопротивления по миделю от числа кавитации.

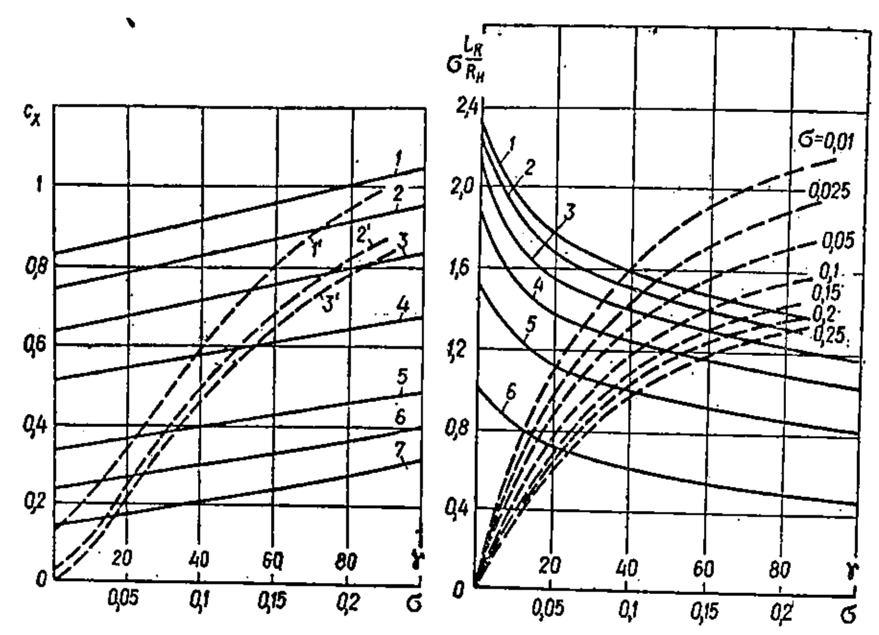


Рис. 2.3. Зависимость коэффициента сопротивления конусов от числа кавитации (сплошные линии) при различных значениях угла полураствора ($1-\gamma=90°$; $2-\gamma=75°$; $3-\gamma=60°$; $4-\gamma=45°$; $5-\gamma=30°$; $6-\gamma=22{,}5°$; $7-\gamma=15°$) и от угла раствора (штриховые линии) при различных значениях числа кавитации ($1'-\sigma=0$; $2'-\sigma=0{,}05$; $3'-\sigma=0{,}2$).

Рис. 2.4. Зависимость длины каверны за конусами от числа кавитации (сплошные линии) при различных значениях угла полураствора ($1-\gamma=90°$; $2-\gamma=75°$; $3-\gamma=60°$; $4-\gamma=45°$; $5-\gamma=30°$; $6-\gamma=15°$) и от угла полураствора (штриховые линии) при различных числах кавитации.

соответствует расчету $c_к$ для кавитирующих конусов с углами раствора $2\gamma = 30 \div 180°$; она показывает, что $k = 0{,}9$.

Л. Г. Гузевский расчетным путем показал, что зависимость коэффициента сопротивления по площади сечения срыва c_x от числа кавитации тоже линейна, однако она несколько отличается от общепринятых

$$c_x \approx c_{x_0}(1+\sigma), \quad c_x \approx c_{x_0} + \sigma.$$

Это иллюстрирует рис. 2. 3, относящийся к дискам и не очень тонким конусам. Так, для конусов с углом раствора $2\gamma \geqslant 90°$

$$c_x = c_{x_0}(1 + 1{,}05\sigma).$$

Для конусов с углом раствора $2\gamma < 90°$ лучше подходит зависимость

$$c_x \approx c_{x_0} + \frac{2}{3}\sigma, \qquad (2.57)$$

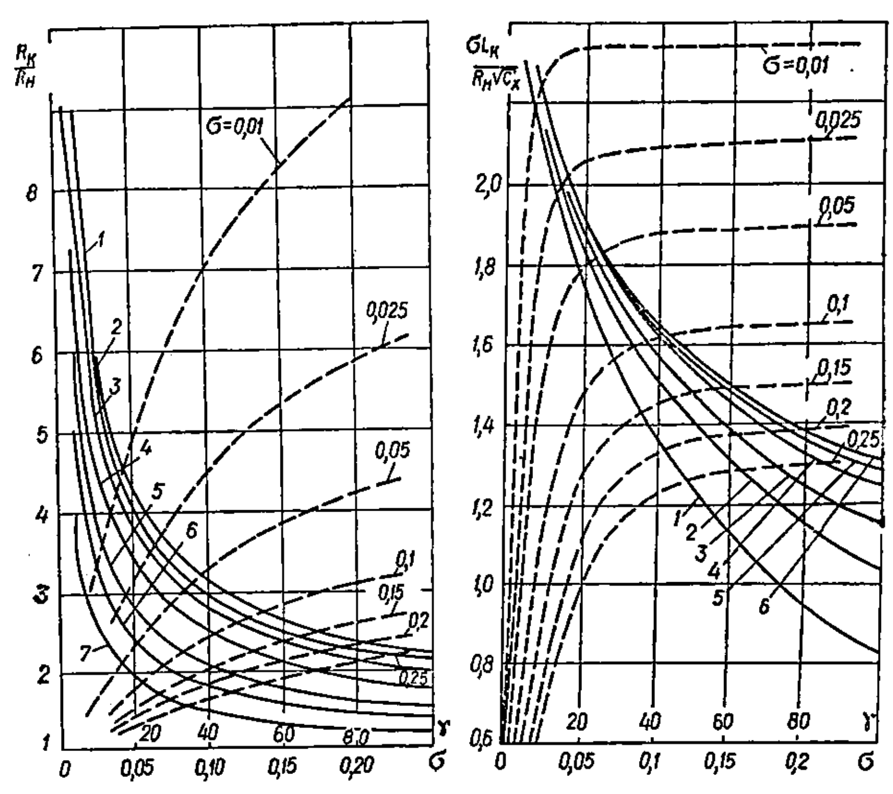


Рис. 2.5. Зависимость максимального радиуса каверны за конусами от числа кавитации (сплошные линии) при различных значениях угла полураствора ($1-\gamma=90°$; $2-\gamma=75°$; $3-\gamma=60°$; $4-\gamma=45°$; $5-\gamma=30°$; $6-\gamma=22{,}5°$; $7-\gamma=15°$) и от угла полураствора (штриховые линии) при различных числах кавитации.

Рис. 2.6. Зависимость комплекса $\frac{\sigma L_k}{R_н\sqrt{c_x}}$ от числа кавитации (сплошные линии) при различных значениях угла полураствора конуса ($1-\gamma=90°$; $2-\gamma=60°$; $3-\gamma=45°$; $4-\gamma=30°$; $5-\gamma=22{,}5°$; $6-\gamma=15°$) и от угла полураствора конуса (штриховые линии) при различных значениях числа кавитации.

которую в свое время одним из первых предлагал О. Г. Тайц. Он же дал и аналитическую зависимость $c_{x_0}(\gamma)$:

$$c_{x_0}(\gamma) = \frac{2}{3}\left[1-(1+\mathrm{tg}^2\gamma)\left(1-\frac{1}{2}\,\mathrm{tg}^2\gamma\ln\frac{4}{\mathrm{tg}^2\gamma}\right)^2\right], \qquad (2.58)$$

которая достаточно хорошо описывает поведение функции $c_{x_0}(\gamma)$ при $2\gamma < 90°$. Достоверность зависимостей (2.57) и (2.58) для тонких конусов видна также из рис. 2.3, где даны графики $c_x(\gamma)$ для различных чисел кавитации.

Выше было показано, что величина $\frac{\sigma L_к}{R_н}$ слабо и почти линейно зависит от числа кавитации σ. Рис. 2.4 подтверждает это лишь для $\sigma >$

$> 0,1$. В области малых чисел кавитации эта зависимость явно нелинейная. Характер этой нелинейности весьма слабо зависит от величины угла раствора конуса, хотя зависимость величины $\frac{\sigma L_к}{R_н}$ от угла раствора конуса существенно нелинейна в широком диапазоне изменения чисел кавитации (рис. 2.4).

Столь же важны графические зависимости радиуса миделевого сечения от числа кавитации при различных углах раствора конуса, как и зависимости его от угла раствора при различных значениях числа кавитации (рис. 2.5). Ценность этих графиков не только в том, что они могут быть использованы в непосредственных инженерных расчетах, но и в том, что они служат эталонами при построении различных приближенных аппроксимаций. Сравнение с ними показывает также достойное место некоторых ставших уже общепринятыми приближенных соотношений осесимметричной кавитации.

Расчеты Л. Г. Гузевского наглядно показали также существенную зависимость величины $\frac{\sigma L_к}{R_н\sqrt{c_x}} = \bar{L}_к$ от угла раствора конуса при немалых числах кавитации и малых углах раствора. Если $\sigma < 0,1$, то лишь для углов $2\gamma > 40°$ можно считать, что указанный выше комплекс не зависит от угла γ. Этот результат далеко не очевиден и из приближенных теорий не вытекает. Поэтому рис. 2.6 несет не только практическую ценность, но и новую научную информацию.

Следствием отмеченного явления есть и различие удлинения (или величины, ему обратной) каверн за тонкими конусами при немалых числах кавитации, что и иллюстрирует рис. 2.6.

Заканчивая краткое описание результатов, полученных Л. Г. Гузевским при изучении кавитационного обтекания конусов и дисков, хотелось бы отметить, что развитая им теория дает в руки исследователя инструмент, с помощью которого в настоящее время можно достаточно точно рассчитать все характеристики течения. Большое количество графиков позволяет получать эти характеристики без предварительных и зачастую сложных расчетов.

ГЛАВА 3

ТЕЧЕНИЯ В ПРОДОЛЬНОМ ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Несомненный интерес представляет исследование поведения свободных границ при входе тела в воду. Из большого количества вопросов, возникающих при рассмотрении этих задач, сосредоточим внимание на случае, когда тело движется с постоянной скоростью вдоль (или против) вектора ускорения силы тяжести, а влиянием свободной поверхности жидкости можно пренебречь. В этом плане выполнено несколько работ, из которых упомянем здесь [8, 12, 40, 48, 72, 92, 113, 148]. Они содержат как теоретическое, так и экспериментальное исследование движения свободных границ в продольном поле силы тяжести. Но если работы [57, 72, 92, 93, 113] основаны на применении теории тонких тел, то в работах [8, 12, 50] использован «энергетический» подход, справедливый не только для тонких тел. Они имеют отношение фактически к свободным границам, удаленным от кавитатора и замыкателя на некоторое немалое расстояние. Общим в этих теоретических исследованиях является то, что сами свободные границы, рассматриваемые как линии тока, образуют тонкое тело. Взаимоотношение этих двух подходов, их общность и различие достаточно подробно проанализированы в работе [81].

Здесь необходимо отметить, что поскольку нас интересуют лишь пространственные течения, то работы по плоским течениям упоминаться практически не будут, хотя в этом направлении литература гораздо богаче [62, 72, 112, 113, 143, 162].

Основной особенностью движения свободных границ в продольном поле силы тяжести является непрерывное изменение поля давления вне каверны, что ведет к переменности разности давлений в окружающей жидкости и каверне. Иными словами, в этом случае число кавитации, определенное как отношение разности давлений к скоростному напору, уже не постоянно, а зависит от местоположения свободных границ даже при постоянной скорости кавернообразующего тела. Поэтому теории, основанные на постоянстве разности давлений, уже не применимы для исследования течений в переменном поле давления. Однако некоторые из них допускают простые обобщения.

§ 1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Уравнения формы тонких каверн в продольном поле силы тяжести можно получить, исходя из основных уравнений гидродинамики тонкого тела, как это делалось раньше в случае невесомой жидкости [36,

138]. Потенциал скоростей течения около тонкого тела можно построить как потенциал течения около источников, расположенных на оси тонкого осесимметричного тела.

Совместим ось x цилиндрической системы координат x, r, θ с осью тонкого тела и направим ее в сторону, противоположную движению тела.

Используем асимптотическое выражение для потенциала, справедливое вблизи оси тела

$$\varphi(x, r, t) = \int_a^b \frac{\nu(\xi, t)\, d\xi}{(x-\xi)^2 + r^2} = -2\nu(x, t) \ln r + f(x, t).$$

Плотность источников $\nu(x, t)$ будет определена ниже, а неизвестную функцию $f(x, t)$ свяжем с искомой плотностью $\nu(x, t)$, выразив ее через другую неизвестную функцию $\psi(x, t)$

$$f(x, t) = 2\nu(x, t) \ln \psi(x, t).$$

Этим самым фактически выбрана нулевая эквипотенциальная поверхность $r = \psi(x, t)$; потенциал

$$\varphi(x, r, t) = -2\nu(x, t) \ln \frac{r}{\psi(r, t)} \qquad (3.1)$$

описывает течение в области около оси x до внешней границы $r = \psi(x, t)$. Чем ближе рассматриваемая точка пространства к оси x, тем лучше функция (3.1) описывает данное течение.

Поскольку в качестве тонкого тела здесь рассматривается тонкая каверна, на ее границе должны быть выполнены кинематическое и динамическое условия:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial t}\right)_{r=R} = 0; \qquad (3.2)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2 = \frac{P - P_к}{\rho}, \quad (r = R). \qquad (3.3)$$

Предполагая движение вдоль вектора ускорения силы тяжести (погружение) и обозначая P_0 давление жидкости на уровне кавитатора ($P_к$ — давление в каверне), видим, что

$$\frac{P - P_к}{\rho} = \frac{P_0 - \rho g x - P_к}{\rho}.$$

Подставляя в (3.2) асимптотическое выражение (3.1) потенциала, справедливое вблизи оси каверны, и учитывая, что $\varphi \sim \varepsilon^2 \ln \varepsilon$, где ε — параметр тонкости каверны, получаем

$$\nu(x, t) = -\frac{1}{4}\frac{\partial R^2}{\partial t},$$

так что вместо соотношения (3.1) имеем

$$\varphi(x, r, t) = \frac{1}{2}\frac{\partial R^2}{\partial t} \ln \frac{r}{\psi(x, t)}. \qquad (3.4)$$

Используя это выражение в уравнении (3.3) и опять оценивая слагаемые, получаем некоторое обобщение уравнения С. С. Григоряна

$$4\frac{\partial^2 R^2}{\partial t^2} \ln \frac{R}{\psi} + \frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial R^2}{\partial t}\right)^2 = 4\left(\sigma_0 - \frac{2t}{Fr_L^2}\right). \qquad (3.5)$$

Здесь σ_0 — число кавитации, вычисленное по разности давлений на уровне кавитатора и в каверне; Fr_L — число Фруда по масштабу длины L^*, в качестве которого можно использовать полудлину стационарной каверны в невесомой жидкости при числе кавитации σ_0. В этом уравнении введены безразмерные величины. В качестве основных размерных величин, которые будем отмечать звездочками, использовались: $L_к^*$ — полудлина стационарной каверны, V_0^* — скорость движения кавитатора, ρ^* — плотность жидкости. Часто бывает удобным использование линейного масштаба $R_н^*$ — радиуса сечения срыва. В этом случае безразмерные величины будем отмечать чертой.

Учитывая тонкость каверны и малость величины $\dot{R}$ в ее средней части, уравнение (3.5) можно упростить еще, опуская второе слагаемое и, кроме того, полагая

$$\ln \frac{\psi}{R} = \ln\left(\frac{\psi}{L_к}\frac{L_к}{R}\right) \approx \ln(\chi\Lambda_к) = \mu = \text{const}. \qquad (3.6)$$

Вводя площадь поперечного сечения

$$S = \pi R^2$$

и учитывая указанные допущения, имеем

$$\mu\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} + \pi\sigma(t) = 0, \qquad (3.7)$$

где

$$\sigma(t) = \sigma_0 - \frac{2t}{Fr_L^2}.$$

Уравнению второго порядка (3.7) необходимо придать два условия. С учетом специфики задачи оба эти условия можно задать в момент прохождения сечением срыва плоскости наблюдения. В этот момент можно считать заданным сечение срыва: $S(0) = S_н$. Значение же производной определим, применяя теорему об изменении кинетической энергии кольца каверны, которое начинает радиально расширяться после срыва струй с кавитатора. Ввиду тонкости каверны считаем, что в начальный момент (момент срыва) вся энергия образовавшегося жидкого кольца заключена в его кинетической энергии, которую в случае радиального расширения легко вычислить:

$$T^* = \frac{\rho^*}{2}\int_0^{2\pi}\int_{R^*}^{r^*}\left(\frac{R^*\dot{R}^*}{r}\right)^2 r^* dr^* d\theta = \pi\rho^*(R^*\dot{R}^*)^2 \ln\frac{r^*}{R^*}.$$

Заметим, что производная $\dot{R}^*$ должна вычисляться в начальный момент времени.

В этом выражении r^* — достаточно большое значение внешнего радиуса жидкого кольца. Это фактически некоторая условно выбранная граница, дальше которой в рамках принятых допущений влияние каверны не распространяется. Обычно r^* составляет несколько значений R^*. Отождествляя эту границу с функцией ψ или близкой к ней, получаем

$$\ln\frac{r}{R} = \ln\left(\frac{r}{L_к}\frac{L_к}{R}\right) = k\ln\left(\frac{\psi}{L_к}\frac{L_к}{R}\right) = k\ln(\chi\Lambda_к) = k\mu.$$

Поправочный коэффициент k здесь введен потому, что, если $r = \psi$, вся энергия расширения отождествляется с кинетической энергией кольца каверны с внешним радиусом $r = \psi$; отклонение от этого и учитывается коэффициентом k.

Формула для кинетической энергии жидкого кольца на единицу длины каверны принимает вид

$$T^* = \pi\rho^* k\mu (R^*\dot{R}^*)^2.$$

Если ввести силу сопротивления кавитатора

$$W_0 = c_x\frac{\rho^* V_0^{*2}}{2} S_н^*,$$

где c_x — коэффициент сопротивления, и воспользоваться теоремой об изменении кинетической энергии, то приходим к соотношению

$$\frac{\pi\rho^* k\mu}{4}\left(\frac{dR^{*2}}{dt^*}\right)^2 = W_0^*.$$

Отсюда и получается начальное условие для производной от площади сечения

$$\frac{dS}{dt} = \pi R_н\sqrt{\frac{2c_x}{k\mu}}. \qquad (3.8)$$

Коэффициент k, как будет показано ниже, совпадает с таким же коэффициентом, введенным Г. В. Логвиновичем, и его значение близко к единице. Постоянную χ тоже можно выбрать из сравнения с решением для стационарной каверны.

§ 2. СТАЦИОНАРНОЕ РЕШЕНИЕ

Имеем задачу

$$\mu_0\frac{d^2S}{dx^2} + \pi\sigma_0 = 0, \qquad (3.9)$$

$$S(0) = S_н, \quad \left.\frac{dS}{dx}\right|_{x=0} = \pi R_н\sqrt{\frac{2c_x}{k\mu_0}},$$

решение которой

$$S(x) = S_н + \pi R_н\sqrt{\frac{2c_x}{k\mu}}\,x - \frac{\pi\sigma_0 x^2}{2\mu_0}. \qquad (3.10)$$

Замыкая каверну на тело радиуса $R_н$, для длины каверны получаем

$$x_l = R_н\frac{2\mu_0}{\sigma_0}\sqrt{\frac{2c_x}{k\mu_0}}. \qquad (3.11)$$

Поскольку решение (3.10) симметрично относительно миделевого сечения, то координата миделя вычисляется по формуле

$$x_к = R_н\frac{\mu_0}{\sigma_0}\sqrt{\frac{2c_x}{k\mu_0}}.$$

Подставляя это значение $x_к$ в (3.10), получаем выражение для площади миделевого сечения

$$S_к = S_н\left(1 + \frac{c_x}{k\sigma_0}\right).$$

При малых числах кавитации второе слагаемое намного больше первого и можно положить

$$S_к = S_н\frac{c_x}{k\sigma_0}. \qquad (3.12)$$

Сравнивая это выражение с соответствующими выражениями, полученными в работах [80, 134], приходим к выводу, что $k \approx 0{,}96$, хотя, вообще говоря, постоянная k должна зависеть от числа кавитации.

Определим постоянную χ. Для этой цели найдем удлинение каверны

$$\Lambda_0 = \sqrt{\frac{2\mu_0}{\sigma_0}}.$$

Возводя в квадрат левую и правую части этого равенства и вспоминая, что $\mu_0 = \ln\chi\Lambda_0$, приходим к уравнению

$$\sigma_0\Lambda_0^2 = \ln\chi^2\Lambda_0^2,$$

решение которого можно записать в виде

$$\chi = \frac{\sqrt{\exp(\sigma_0\Lambda_0^2)}}{\Lambda_0}. \qquad (3.13)$$

Поскольку удлинение Λ_0 осесимметричной каверны в невесомой жидкости приближенно можно считать зависящим только от числа кавитации, то постоянная χ тоже зависит от σ_0. Это можно установить, рассмотрев $\Lambda_0(\sigma_0)$. Так, по данным Г. В. Логвиновича, Л. А. Эпштейна, Гарабедяна и Райхардта, соответственно формулы для удлинений имеют вид

$$\Lambda_0 = \frac{2{,}077 - 3{,}245\sigma_0}{\sqrt{\sigma_0(1+\sigma_0)}}, \qquad (3.14)$$

$$\Lambda_0 = \frac{1{,}67}{\sqrt{\sigma_0(1+\sigma_0)}}, \qquad (3.15)$$

Таблица 1

σ_0	$\Lambda_0(\sigma_0)$					$\chi(\sigma_0)$	$\mu(\sigma_0)$
	(3.14)	(3.15)	(3.16)	(3.17)	(3.18)	(3.18)	(3.18)
0,25	2,2642	2,9814	2,3548	2,1018	2,4365	0,862	0,74
0,20	2,9149	3,4021	2,8410	2,5616	2,9412	0,808	0,86
0,16	3,6160	3,8764	3,3843	3,1065	3,5090	0,763	0,98
0,15	3,8289	4,0129	3,5563	3,2814	3,6870	0,752	1,02
0,10	5,2840	5,0252	4,8080	4,5763	5,0000	0,698	1,25
0,08	6,1829	5,6701	5,6119	5,4455	5,8478	0,671	1,37
0,06	7,4638	6,6088	6,8476	6,7460	7,1557	0,649	1,53
0,05	8,3566	7,2739	7,7404	7,6821	8,1051	0,636	1,64
0,04	9,5469	8,1715	8,9706	8,9552	9,4188	0,625	1,77
0,025	12,468	10,412	12,147	12,147	12,836	0,611	2,06
0,02	14,087	11,669	13,986	14,000	14,827	0,608	2,20
0,01	20,344	16,584	21,459	21,687	22,988	0,611	2,64
0,006	26,483	21,452	29,200	30,621	31,454	0,618	2,97
0,002	46,252	37,231	55,743	72,046	60,559	0,646	3,67

$$\Lambda_0 = \sqrt{\frac{1}{\sigma_0}\ln\frac{1}{\sigma_0}}, \tag{3.16}$$

$$\Lambda_0 = \frac{\sigma_0 + 0{,}008}{\sigma_0\,(0{,}066 + 1{,}7\sigma_0)}. \tag{3.17}$$

Здесь следует оговориться, что формула Логвиновича более всего соответствует случаю каверны за диском. Сравнение формул (3.14) и (3.15) показывает, что результаты расчетов по ним совпадают при $\sigma_0 = 0{,}125$. Следовательно, в диапазоне $0{,}1 < \sigma_0 < 0{,}15$ они весьма близки.

Л. Г. Гузевский [37] дал свою аппроксимационную формулу, более точную, чем все остальные, и, главное, учитывающую особенности кавернообразующего тела

$$\Lambda_0 = [1{,}0925 - g(\gamma)\,\sigma_0]\sqrt{\frac{k}{\sigma_0}\ln\frac{1}{\sigma_0}}. \tag{3.18}$$

Постоянную k рекомендуется определять по формуле

$$k = \frac{1 + 50\sigma_0}{1 + 56{,}2\sigma_0}, \tag{3.19}$$

а функцию $g(\gamma)$, где γ — угол полураствора конуса, выражением

$$g(\gamma) = \frac{4\,(90^\circ - \gamma^0)}{90^\circ + 0{,}4\gamma^{02}}.$$

Видно, что постоянную k можно принимать равной единице лишь приближенно. Например, при $\sigma_0 = 0{,}01$ и $\sigma_0 = 0{,}1$ она соответственно равна 0,96 и 0,91. Но поскольку величину удлинения определяет не сама k, а значение $\sqrt{k}$, соответственно равное 0,98 и 0,955, то погрешность такой замены при $\sigma_0 \leqslant 0{,}1$ будет меньше 5 %. Можно заметить, что аппроксимационная формула Л. Г. Гузевского для диска практически совпадает с формулой Гарабедяна. Во всяком случае, они различаются в той степени, в которой множитель $1{,}0925\sqrt{k}$ отличается от единицы. А это отличие при $\sigma_0 = 0{,}01$ и $\sigma_0 = 0{,}1$ равно 0,07 и 0,04, иными словами, остается около 5 %.

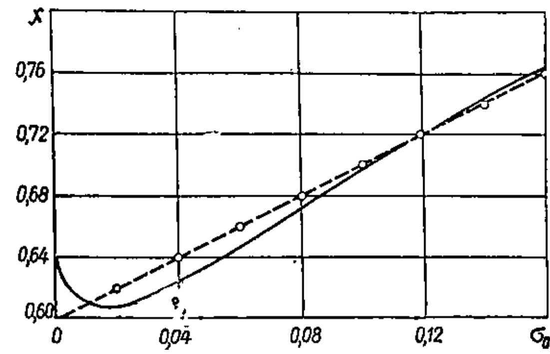


Рис. 3.1. Зависимость величины χ от числа кавитации (сплошная линия) и линейная аппроксимация χ (штриховая линия).

Значения удлинений, рассчитанные для различных чисел кавитации по всем приведенным выше формулам, показаны в табл. 1.

Сравнивая их с наиболее точными, полученными по формуле Л. Г. Гузевского, можно видеть, что каждая из формул хорошо приближает значения Λ_0 к условно точным только в некотором диапазоне чисел кавитации. Они создавались на основе экспериментов и теоретических аппроксимаций. Наиболее удачно аппроксимируется диапазон $0{,}01 \leqslant \sigma_0 \leqslant 0{,}1$. При $\sigma_0 > 0{,}1$ и $\sigma_0 < 0{,}01$ ошибки аппроксимаций быстро нарастают. В диапазоне $0{,}01 \leqslant \sigma_0 \leqslant 0{,}1$ наименее точны формулы Л. А. Эпштейна и Райхардта. Если учесть, что при $\sigma_0 > 0{,}1$ и $\sigma_0 < 0{,}01$ формула Райхардта приводит к ошибкам, бо́льшим, чем все другие, то при пользовании ею следует особенно тщательно следить за областью применимости. Но в наиболее благоприятной области $0{,}01 \leqslant \sigma_0 \leqslant 0{,}1$ эту формулу можно несколько изменить, округлив числовые значения коэффициентов

$$\Lambda_0 = \frac{\sigma_0 + 0{,}01}{\sigma_0\,(0{,}07 + 1{,}7\sigma_0)}. \tag{3.20}$$

Итак, имея значения $\Lambda_0(\sigma_0)$, можно вычислить и значения постоянной χ. Пользуясь формулой (3.13) и принимая за основу значения Λ_0, рассчитанные по формулам Л. Г. Гузевского, получаем значения χ, приведенные в последней колонке таблицы. Графически $\chi(\sigma_0)$ изображено на рис. 3.1. Видно, что при $0{,}02 < \sigma_0 < 0{,}25$ зависимость $\chi(\sigma_0)$ линейна и ее хорошей аппроксимацией может служить функция

$$\chi = 0{,}6 + \sigma_0,$$

хотя гораздо более точной будет аппроксимация

$$\chi = 0{,}58 + 1{,}15\sigma_0.$$

Имея аппроксимацию для $\chi(\sigma_0)$, можно формулу (3.13) приспособить и для вычисления зависимости между числом кавитации и удлинением

$$(0{,}6 + \sigma_0)^2\Lambda_0^2 = e^{\sigma_0\Lambda_0^2}. \tag{3.21}$$

Прологарифмировав это выражение, имеем

$$\sigma_0 = \frac{2\ln(0{,}6+\sigma_0)\Lambda_0}{\Lambda_0^2}. \tag{3.22}$$

Уравнение (3.22) можно тоже использовать для вычисления зависимости $\sigma_0(\Lambda_0)$. Здесь эффективен метод последовательных приближений

$$\sigma_0^{(i+1)} = \frac{2\ln(0{,}6+\sigma_0^{(i)})\Lambda_0}{\Lambda_0^2}.$$

Надо отметить, что соотношение (3.22) представляет собой достаточно точную связь между числом кавитации и удлинением. Эта связь тем точнее, чем меньше число кавитации. Но даже для сравнительно больших чисел кавитации она дает вполне приемлемую точность. Так, при $\sigma_0 = 0{,}25$ расчет по формулам Л. Г. Гузевского дает $\Lambda_0 = 2{,}4365$. Рассчитанное по формуле (3.22) методом исследовательных приближений число кавитации при $\Lambda_0 = 2{,}4365$ равно $\sigma_0 = 0{,}242153$. Как видим, число кавитации отличается на 3 %. Если же по этому числу кавитации $\sigma_0 = 0{,}242153$ вычислить удлинение каверны по Гузевскому, получится значение $\Lambda_0 = 2{,}5043$, отличие в удлинении составит менее 3 %. При этом числа кавитации занижаются на 3 %.

Принимая величину χ постоянной, можно получить более простую форму связи $\sigma_0(\Lambda_0)$, чем формула (3.22), однако, как теперь видно, это было бы лишь нулевое приближение в вычислении числа кавитации. Как показывает формула (3.22), это приближение может быть приемлемым, если $\sigma_0 \ll 0{,}06$. Например, в случае $\sigma_0 = 0{,}1$ зависимость (2.22) при $\chi = 0{,}605$ [13] дает значение $\Lambda_0 = 4{,}462$ вместо $\Lambda_0 = 5{,}000$ по формулам Л. Г. Гузевского, имеющим погрешность около 0,5 %. Погрешность нулевого приближения при $\sigma_0 = 0{,}1$ составляет еще около 11 %.

При малых числах кавитации эта погрешность может быть связана с числом кавитации, если заметить, что

$$\ln(0{,}6+\sigma_0)\Lambda_0 = \ln 0{,}6\Lambda_0 + \ln\left(1+\frac{\sigma_0}{0{,}6}\right) \approx \ln 0{,}6\Lambda_0 + \frac{\sigma_0}{0{,}6}.$$

При $\sigma_0 \ll 0{,}1$, когда $\Lambda_0 > 10$, первое слагаемое близко к двойке. Тогда погрешность выразится соотношением

$$\delta \approx \frac{\sigma_0}{1{,}2}.$$

Учитывая грубый характер этих приближений в оценочных расчетах, погрешность нулевого приближения считаем равной числу кавитации: $\delta \sim \sigma_0$. Однако это имеет место при условии $\sigma_0 < 0{,}1$. При $\sigma_0 > 0{,}1$ погрешность нулевого приближения растет весьма быстро. Так, при $\Lambda_0 = 2{,}4365$ нулевое приближение для числа кавитации $\sigma_0^{(0)} = 0{,}127933$, что на 54 % ниже условно точного значения $\sigma_0 = 0{,}25$. В то же время удлинение каверны при $\sigma_0^{(0)}$, рассчитанное по формулам Л. Г. Гузевского, составляет величину $\Lambda_0 = 4{,}1624$ что на 71 % превосходит условно точное значение $\Lambda_0 = 2{,}4365$.

Отсюда практический вывод о том, что формулой нулевого приближения (при $\chi = 0{,}605$) можно пользоваться лишь для каверн, удлинение которых не менее $\Lambda_0 = 8$, что соответствует числам кавитации $\sigma_0 \leqslant 0{,}05$. Тогда погрешность не будет выше 5 %.

§ 3. ПОГРУЖЕНИЕ КАВЕРНЫ

Определив постоянные k и χ, входящие в основные уравнения задачи, можно приступить к исследованию формы каверны в продольном поле силы тяжести. При погружении функция $\sigma(t)$ (переменное число кавитации) выражается через число кавитации σ_0 (по разности давлений на уровне кавитатора) и число Фруда по полудлине каверны соотношением

$$\sigma(t) = \sigma_0 - \frac{2t}{\mathrm{Fr}_L^2}.$$

Поэтому начально-краевая задача для уравнения (3.7) будет выглядеть следующим образом:

$$\mu\frac{d^2S}{dt^2} + \pi\left(\sigma_0 - \frac{2t}{\mathrm{Fr}_L^2}\right) = 0, \tag{3.23}$$

$$S(0) = S_н, \quad \left.\frac{dS}{dt}\right|_{t=0} = \pi R_н c,$$

где

$$c = \sqrt{\frac{8\mu c_x}{k}}. \tag{3.24}$$

Решением задачи (3.23) является

$$\frac{\mu}{\pi}S(t) = \frac{\mu}{\pi}S_н + \frac{1}{2}cR_н t - \frac{1}{2}\sigma_0 t^2 + \frac{t^3}{3\mathrm{Fr}_L^2}. \tag{3.25}$$

Напомним, что все величины здесь безразмерные, а в качестве линейного масштаба принята полудлина $L_к^*$ стационарной каверны при σ_0. Часто бывает удобно линейным масштабом выбирать радиус сечения срыва $R_н^*$ как величину, не зависящую от числа кавитации. Такие безразмерные величины будем обозначать чертой, тогда, например, уравнение (3.25) принимает вид

$$\mu\bar{S}(\bar{t}) = \mu + \frac{1}{2}c\bar{t} - \frac{1}{2}\sigma_0\bar{t}^2 + \frac{\bar{t}^3}{6\,\mathrm{Fr}^2}. \tag{3.26}$$

Символ Fr обозначает число Фруда по диаметру сечения срыва.

Итак, решения (3.25) или (3.26) свидетельствуют о том, что погружающаяся с постоянной скоростью каверна, внутри которой поддерживается постоянное давление, описывается функциями (3.25) или

(3.26), представляющими собой кубические параболы. Влияние поля силы тяжести отражает последнее слагаемое, содержащее старшую степень и число Фруда. Более слабое влияние силы тяжести заключено в постоянной μ, а следовательно, и в c. Однако параметр μ изменяется мало.

Из уравнения типа (3.26) сразу вытекает важный вывод о том, что форма передней части каверны зависит весьма слабо как от величины числа Фруда, так и от числа кавитации.

Закон изменения площади поперечного сечения вертикальной каверны, как видно из уравнений типа (3.26), зависит от постоянных σ_0, Fr и μ. Две первые характеризуют режим течения и задаются. Параметр μ надо определить. С этой целью можно рекомендовать метод последовательных приближений. В качестве нулевого приближения можно задавать то значение $\mu = \mu_0$, которое соответствует стационарному решению задачи в невесомой жидкости

$$\mu_0 = \frac{\sigma_0}{2} \Lambda_0^2.$$

Это, однако, не очень удобно, поскольку μ_0 надо специально рассчитывать, а соответствует оно только начальному этапу расчета. Если согласно приведенной выше таблице рассмотрим значения μ_0 для различных чисел кавитации, то для $\sigma_0 = 0{,}1$; 0,08; 0,04; 0,02 и 0,01 получим $\mu_0 = 1{,}25$; 1,37; 1,77; 2,20 и 2,64. Если теперь учесть, что наличие поля силы тяжести ведет к понижению чисел кавитации, то можно сделать вывод, что в качестве нулевого приближения для параметра μ следует выбирать значение $\mu_0 = 2$. При таком значении μ_0 вычисляются длина и диаметр миделевого сечения каверны и определяется первое приближенное значение удлинения Λ_1 вертикальной каверны, по которому рассчитывается новое, уточненное значение параметра $\mu = \mu_1$ согласно формуле

$$\mu_1 = \ln \chi\Lambda_1.$$

Производя новые вычисления длины и диаметра каверны уже при $\mu = \mu_1$, определяем и новое значение удлинения Λ_2, а затем

$$\mu_2 = \ln \chi\Lambda_2.$$

И так до тех пор, пока параметр μ не будет найден с необходимой точностью. Это значение параметра μ и принимается за расчетное, соответствующее данному числу кавитации σ_0, числу Фруда Fr и форме кавернообразующего тела, информация о котором заложена в коэффициент сопротивления c_x. При этом полезно помнить, что поскольку удлинение каверны не может быть по крайней мере менее 2, то $\mu > 0{,}5$.

§ 4. ОСНОВНЫЕ РАЗМЕРЫ КАВЕРНЫ ПРИ ПОГРУЖЕНИИ

Чтобы определить длину каверны, надо найти нули функции (3.25) или (3.26). Поскольку, однако, мы считаем, что каверна замыкается на тело определенного радиуса, то полагаем, что при $t = t_l$ функ-

ция $S(t)$ принимает значение $S_н$, как и в каверне Рябушинского в невесомой жидкости. Отличие состоит только в том, что рассматриваемая каверна уже не будет симметричной относительно миделевого сечения. Итак, полагая $S(t) = S_н$, находим два корня этого уравнения

$$t_{1,2} = \frac{3}{4}\sigma_0 \mathrm{Fr}_L^2\left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{8cR_н}{3\sigma_0^2 \mathrm{Fr}_L^2}}\right).$$

Третий корень $t = 0$ определяет время начала образования каверны. Если бы решалось уравнение $\overline{S}(\overline{t}) = \overline{S}_н$, то корни были бы следующими:

$$\overline{t}_{1,2} = \frac{3}{2}\sigma_0 \mathrm{Fr}^2\left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{4c}{3\sigma_0^2 \mathrm{Fr}^2}}\right).$$

Поскольку площадь поперечного сечения каверны не может быть отрицательным числом, то с длиной каверны следует отождествить меньший корень

$$t_l = \frac{3}{4}\sigma_0 \mathrm{Fr}_L^2\left(1 - \sqrt{1 - \frac{8cR_н}{3\sigma_0^2 \mathrm{Fr}_L^2}}\right), \qquad (3.27)$$

$$\overline{t}_l = \frac{3}{2}\sigma_0 \mathrm{Fr}^2\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4c}{3\sigma_0^2 \mathrm{Fr}^2}}\right).$$

Заметим, что эти формулы переходят одна в другую, если учесть, что

$$\mathrm{Fr}_L^2 = \frac{2R_н}{L_к}\mathrm{Fr}^2.$$

Бóльший корень t_2 определяет еще один нуль функции $S(t) - S_н$. Таким образом, функция $S(t) - S_н$ равна нулю при $t=0$, $t=t_l$ и $t=t_2$, при этом на интервале $0 < t < t_1$ она положительна, а на интервалах $t_1 < t < t_2$ и $t_2 < t < \infty$ ее знак зависит от соотношения параметров σ_0 и Fr. Существование нулей этой функции связано с определенными допущениями, а именно с условием, чтобы подкоренное выражение было положительным

$$\sigma_0^2 \mathrm{Fr}^2 > \frac{4c}{3}. \qquad (3.28)$$

Исследуем поведение функции $S(t) - S_н$ на каждом из этих интервалов при условии (3.28). Вычислим стационарные точки функции $S(t)$. Ее производная

$$\frac{\mu}{\pi} S'(t) = \frac{1}{2} cR_н - \sigma_0 t + \frac{t^2}{\mathrm{Fr}_L^2} \qquad (3.29)$$

имеет нули в точках

$$\tilde{t}_{1,2} = \frac{\sigma_0 \mathrm{Fr}_L^2}{2}\left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{2cR_н}{\sigma_0^2 \mathrm{Fr}_L^2}}\right) \qquad (3.30)$$

или в линейном масштабе $R_к$

$$\bar{\bar{t}}_{1,2}=\sigma_0\,\mathrm{Fr}^2\left(1\mp\sqrt{1-\frac{c}{\sigma_0^2\,\mathrm{Fr}^2}}\right). \qquad (3.31)$$

Эти стационарные точки действительны при условии

$$\sigma_0^2\,\mathrm{Fr}^2\geqslant c. \qquad (3.32)$$

Если оно выполняется, то меньший из нулей производной определяет координату миделевого сечения каверны

$$t_к=\frac{1}{2}\,\sigma_0\,\mathrm{Fr}_L^2\left(1-\left(\sqrt{1-\frac{2cR_н}{\sigma_0^2\,\mathrm{Fr}_L^2}}\right)\right); \qquad (3.33)$$

$$\bar{t}_к=\sigma_0\,\mathrm{Fr}_L^2\left(1-\sqrt{1-\frac{c}{\sigma_0^2\,\mathrm{Fr}^2}}\right).$$

Подставив, например, $\bar{t}_к$ из (3.33) в уравнение (3.26), получим выражение для площади миделевого сечения каверны

$$\bar{S}_к=1+\frac{c\sigma_0\,\mathrm{Fr}^2}{2\mu}\left[1-\frac{2}{3}\sqrt{1-\frac{c}{\sigma_0^2\,\mathrm{Fr}^2}}-\right.$$

$$\left.-\frac{2\sigma_0^2\,\mathrm{Fr}^2}{3c}\left(1-\sqrt{1-\frac{c}{\sigma_0^2\,\mathrm{Fr}^2}}\right)\right]. \qquad (3.34)$$

Этому выражению можно придать и другой, возможно, более компактный вид, выразив значение радикалов через величину $\bar{t}_k$, соответствующую координате миделевого сечения. Тогда имеем

$$\bar{S}_к=1+\frac{\sigma_0\,\mathrm{Fr}^2}{6\mu}\left[c-2\sigma_0\bar{t}_к\left(1-\frac{c}{\sigma_0^2\,\mathrm{Fr}^2}\right)\right].$$

Площадь миделевого сечения удобно вычислять также и по общей формуле (3.26), придав ей вид

$$\bar{S}(\bar{t})=1+\frac{\bar{t}}{2\mu}\left[c-\sigma_0\bar{t}\left(1-\frac{\bar{t}}{3\sigma_0\,\mathrm{Fr}^2}\right)\right].$$

Чтобы определить кривизну контура каверны, вычислим вторую производную

$$\frac{\mu}{\pi}\,S''(t)=-\sigma_0+\frac{2t}{\mathrm{Fr}_L^2}.$$

Переходя к радиусу поперечного сечения, находим

$$R''=-\frac{1}{2\mu}\left(R'^2+\sigma_0-\frac{2t}{\mathrm{Fr}_L^2}\right). \qquad (3.35)$$

Значение кривизны в точках $\bar{t}_{1,2}$ имеет вид

$$R''(\tilde{t}_{1,2})=\mp\frac{\sigma_0}{2\mu}\sqrt{1-\frac{2cR_н}{\sigma_0^2\,\mathrm{Fr}_L^2}}.$$

Отсюда вытекает, что $R''(\tilde{t}_1)<0$ и $R''(\tilde{t}_2)>0$. Иными словами, в точке $\tilde{t}_1$ функция $R(t)$, как и $S(t)$, имеет локальный максимум, а в точке $\tilde{t}_2$ — локальный минимум, причем необходимым условием существования точек минимума и максимума является неравенство $\sigma_0^2\,\mathrm{Fr}_L^2>2cR_н$. При $\sigma_0^2\,\mathrm{Fr}_L^2=2cR_н$ эти стационарные точки сливаются в точку минимакса, или точку перегиба $\bar{\bar{t}}_{1,2}=\sigma_0\,\mathrm{Fr}^2$. Это говорит о том, что вид функции $S(t)$, описывающий закон изменения площади поперечных сечений вдоль оси каверны, существенно зависит от режима течения.

Имея координаты миделя (3.33) и конца каверны (3.27), можно определить относительное местоположение миделевого сечения

$$\frac{\bar{t}_к}{\bar{t}_l}=\frac{2\left(1-\sqrt{1-\frac{c}{\sigma_0^2\,\mathrm{Fr}^2}}\right)}{3\left(1-\sqrt{1-\frac{4c}{3\sigma_0^2\,\mathrm{Fr}^2}}\right)}<\frac{2}{3}.$$

При больших значениях $\sigma_0^2\,\mathrm{Fr}^2$ можно получить более наглядную оценку

$$\frac{\bar{t}_к}{\bar{t}_l}\approx\frac{1}{2}\left(1-\frac{c}{12\sigma_0\,\mathrm{Fr}^2}\right).$$

Мидель каверны при погружении, таким образом, сдвинут от ее середины к кавитатору. Максимальная величина этого сдвига отличается для каверны с точкой заострения, когда $\frac{\bar{t}_к}{\bar{t}_l}=\frac{1}{3}$.

§ 5. АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПОГРУЖЕНИЯ

Решение задачи о геометрии свободных границ при погружении с постоянной скоростью вдоль вектора ускорения, как мы видели, представляется формулами (3.25) или (3.26) и (3.27), (3.33) при условиях (3.28) и (3.32). Определяющим параметром в них является комбинация $\sigma_0^2\mathrm{Fr}^2$, которая может принимать различные значения. Величиной этого параметра характеризуется поведение решений задачи и, следовательно, описываемое этим решением течение. Сама структура зависимости решения от параметра $\sigma_0^2\,\mathrm{Fr}^2$ позволяет выделить следующие интервалы его изменения:

$$\sigma_0^2\,\mathrm{Fr}^2<c; \qquad \sigma_0^2\,\mathrm{Fr}^2=c;$$

$$c < \sigma_0^2\,\mathrm{Fr}^2 < \frac{4}{3}\,c;$$

$$\sigma_0^2\,\mathrm{Fr}^2 = \frac{4}{3}\,c; \quad \sigma_0^2\,\mathrm{Fr}^2 > \frac{4}{3}\,c. \tag{3.26}$$

Рассмотрим более подробно поведение решений на этих интервалах значений $\sigma_0^2\,\mathrm{Fr}^2$.

Случай $\sigma_0^2\mathrm{Fr}^2 < c$. Функция $\bar{S}\,(\bar{t})$, определенная выражением (3.26), представляет собой монотонно возрастающую функцию времени, не имеющую ни нулей, ни максимумов, ни минимумов. Строго говоря, решение (3.26) в этом случае не описывает физически реализуемое поведение свободных границ (рис. 3.2).

Случай $\sigma_0^2\,\mathrm{Fr}^2 = c$. При этом конкретном значении параметра $\sigma_0^2\,\mathrm{Fr}^2$ кривая $\bar{S}\,(\bar{t})$ тоже монотонно возрастает с течением времени, однако она имеет точку перегиба

$$\bar{\bar{t}}_{1,2} = \sigma_0\,\mathrm{Fr}^2 = \frac{c}{\sigma_0}\,.$$

В этой точке минимакса производная функции $\bar{S}\,(\bar{t})$ равна нулю, а вторую производную (3.35) можно представить в виде

$$\mu\bar{S}''\,(\bar{t}) = -\sigma_0 + \frac{\bar{t}}{\mathrm{Fr}^2} = \sigma_0\left(-1 + \frac{\bar{t}}{\bar{\bar{t}}_{1,2}}\right).$$

Отсюда видно, что в точке $\bar{t} = \bar{\bar{t}}_{1,2}$ функция $\bar{S}\,(\bar{t})$ меняет знак кривизны: до точки $\bar{\bar{t}}_{1,2}$ кривизна отрицательна, после нее — положительна. Значение самой функции S в точке минимакса оказывается не зависящим явно от числа Фруда

$$\bar{S}\,(\bar{\bar{t}}_{1,2}) = 1 + \frac{\sigma_0^3\,\mathrm{Fr}^4}{6\mu} = 1 + \frac{4c_x}{3k\sigma_0}\,. \tag{3.37}$$

Этот случай вряд ли может представлять физический интерес. Он только позволяет утверждать, что в реально реализуемых течениях $\sigma_0^2\,\mathrm{Fr}^2 > c$. Иными словами, он имеет значение лишь при определении минимального значения параметра $\sigma_0^2\,\mathrm{Fr}^2$.

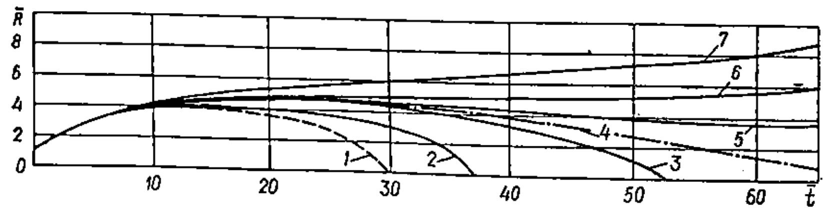


Рис. 3.2. Распределение радиусов вертикальной каверны по ее длине при различных режимах течения (*1, 2, 3* — простые замкнутые каверны; *4* — предельная каверна; *5, 6, 7* — разомкнутые каверны).

Случай $c < \sigma_0^2\,\mathrm{Fr}^2 < \frac{4}{3}\,c$. При значениях $\sigma_0^2\,\mathrm{Fr}^2$ из этого интервала функция $\bar{S}\,(\bar{t})$ все еще не имеет нулей, кроме как в точке $\bar{t} = 0$. Однако она имеет две стационарные точки. Поэтому на таких режимах течения функция $\bar{S}\,(\bar{t})$ представляется кривой, возрастающей при $0 < \bar{t} < \bar{\bar{t}}_1$, убывающей при $\bar{\bar{t}}_1 < \bar{t} < \bar{\bar{t}}_2$ и опять возрастающей при $\bar{t} > \bar{\bar{t}}_2$. Точку $\bar{\bar{t}}_1$ теперь можно отождествить с координатой миделевого сечения, а точку $\bar{\bar{t}}_2$, в которой функция $\bar{S}\,(\bar{t})$ принимает минимальные значения — с концом каверны:

$$\bar{t}_{\text{к}} = \sigma_0\,\mathrm{Fr}^2\left(1 - \sqrt{1 - \frac{c}{\sigma_0^2\,\mathrm{Fr}^2}}\right), \tag{3.38}$$

$$\bar{t}_l = \sigma_0\,\mathrm{Fr}^2\left(1 + \sqrt{1 - \frac{c}{\sigma_0^2\,\mathrm{Fr}^2}}\right).$$

Но каверна в этом случае (если о ней можно вообще говорить) все еще не замкнута. Можно, однако, считать ее условно замкнутой на тело с площадью сечения $S\,(\bar{t}_2)$.

Значения функции $S\,(t)$ в этих условных точках миделя и конца каверны получаются следующими:

$$\mu\bar{S}_{\text{к}} = \mu + \frac{c\sigma_0\,\mathrm{Fr}^2}{2}\left(1 - \frac{2}{3}\sqrt{1 - \frac{c}{\sigma_0^2\,\mathrm{Fr}^2}}\right) - \frac{\sigma_0^3\,\mathrm{Fr}^4}{3}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{c}{\sigma_0^2\,\mathrm{Fr}^2}}\right); \tag{3.39}$$

$$\mu\bar{S}_3 = \mu + \frac{c\sigma_0\,\mathrm{Fr}^2}{2}\left(1 + \frac{2}{3}\sqrt{1 - \frac{c}{\sigma_0^2\,\mathrm{Fr}^2}}\right) - \frac{\sigma_0^3\,\mathrm{Fr}^4}{3}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{c}{\sigma_0^2\,\mathrm{Fr}^2}}\right).$$

Нижняя формула (3.39) соответствует площади поперечного сечения тела, на которое можно полагать замкнутой каверну.

Случай $\sigma_0^2\,\mathrm{Fr}^2 = \frac{4}{3}\,c$. Этот случай соответствует каверне, замкнутой на тело радиуса $R_{\text{н}}^*$. Функция $S\,(t) - S_{\text{н}}$ теперь имеет один нуль, который отвечает длине каверны

$$\bar{t}_l = \frac{3}{2}\,\sigma_0\,\mathrm{Fr}^2 = \frac{2c}{\sigma_0}\,. \tag{3.40}$$

Имеет она максимум и минимум. Максимум можно отождествить с миделевым сечением. Его координата

$$\bar{t}_{\text{к}} = \frac{1}{2}\,\sigma_0\,\mathrm{Fr}^2 = \frac{2c}{3\sigma_0}\,. \tag{3.41}$$

Минимум функции совпадает с концом каверны. В этом случае лег-

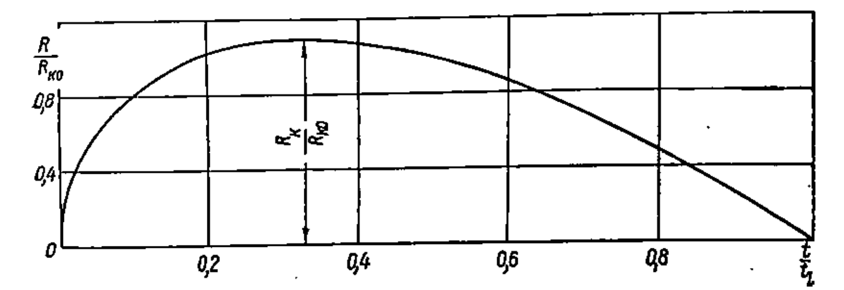


Рис. 3.3. Форма предельной каверны.

ко вычисляется и площадь миделевого сечения

$$\bar{S}_{\text{к}} = 1 + \frac{32c_x}{27k\sigma_0}, \qquad (3.42)$$

которая опять для этого частного вида течения явно не зависит от числа Фруда. Отмеченная независимость характеристик миделевого сечения от числа Фруда на самом деле только кажущаяся. Действительно, допустим, что при некоторых значениях σ_0 и Fr осуществляется такое течение, что $\sigma_0^2 \mathrm{Fr}^2 = \frac{4}{3}c$. Мидель каверны в этом течении определяется формулами (3.41) и (3.42), в которые число Фруда явно не входит. Но если теперь изменить число Фруда, то, чтобы не нарушалось условие $\sigma_0^2 \mathrm{Fr}^2 = \frac{4}{3}c$, необходимо изменить и число кавитации, что сразу же приведет к изменению $\bar{t}_{\text{к}}$ и $\bar{S}_{\text{к}}$. Если, например, число Фруда увеличить вдвое, то вдвое надо уменьшить число кавитации. Это приводит к двойному увеличению длины каверны, координаты ее миделя и почти двойному увеличению площади миделя. Отсюда следует, что площадь миделевого сечения каверны, движущейся вдоль вектора ускорения, меньше, чем у каверны, рассчитанной для невесомой жидкости при $\sigma = \sigma_0$.

Вычисляя вторую стационарную точку функции $\bar{S}(\bar{t})$ в этом течении, находим

$$\bar{\bar{t}}_2 = \frac{3}{2}\sigma_0 \mathrm{Fr}^2 = \bar{t}_l.$$

Значит, минимум функции $\bar{S}(\bar{t})$ совпадает с точкой замыкания каверны и схематически график ее можно изобразить так, как показано на рис. 3.3.

Здесь в случае наличия точки заострения следует иметь в виду, что числа кавитации, Фруда и постоянная μ связаны соотношением $3\sigma_0^2 \mathrm{Fr}^2 = 4c$. Заменяя c и μ их значениями, получаем функциональное соотношение

$$\sigma_0^2 \mathrm{Fr}_d^2 = \frac{8}{3}\sqrt{2c_x \ln\left[\frac{3\left(1+\frac{3}{5\sigma_0}\right)\sigma_0^2 \mathrm{Fr}_d^2}{4\sqrt{1+\frac{32c_x}{27\sigma_0}}}\right]},$$

из которого видно, что при наличии точки заострения числа кавитации и Фруда нельзя выбирать произвольно. Задав, например, число кавитации σ_0, лишь методом последовательных приближений можно найти то значение числа Фруда (и затем постоянную μ), при котором реализуется каверна с точкой заострения.

Отметим, что уравнение каверны с точкой заострения можно записать в очень простом виде, если ввести время $\bar{t}_l$ — момент замыкания каверны. Если использовать обстоятельство, что в этом случае

$$\sigma_0^2 \mathrm{Fr}^2 = \frac{4}{3}c,$$

то уравнение (3.26) можно записать через постоянную c

$$\bar{S}(\bar{t}) = 1 + \frac{c\bar{t}}{2\mu}\left[1 - \frac{\sigma_0\bar{t}}{c}\left(1 - \frac{\sigma_0\bar{t}}{4c}\right)\right].$$

Но поскольку

$$\bar{t}_l = \frac{3\sigma_0 \mathrm{Fr}^2}{2} = \frac{2c}{\sigma_0},$$

то, заменяя в выражении для $\bar{S}(\bar{t})$ величину $c = \frac{1}{2}\sigma_0\bar{t}_l$ через время $\bar{t}_l$, получаем

$$\bar{S}(\bar{t}) = 1 + \frac{c\bar{t}}{2\mu}\left(1 - \frac{\bar{t}}{\bar{t}_l}\right)^2.$$

Используя равенство

$$c = \sqrt{\frac{8\mu c_x}{k}},$$

окончательно приходим к формуле

$$\frac{\bar{S}(\bar{t}) - 1}{\bar{S}_{\text{к}0}} = \frac{8t}{t_l}\left(1 - \frac{t}{t_l}\right)^2,$$

или, если пренебречь размерами кавитатора,

$$\frac{R(t)}{R_{\text{к}0}} = 2\sqrt{2}\left(1 - \frac{t}{t_l}\right)\sqrt{\frac{t}{t_l}},$$

где $S_{\text{к}0}$, $R_{\text{к}0}$ — соответственно площадь и радиус миделевого сечения осесимметричной каверны в невесомой жидкости.

Таким образом, если в качестве масштаба длины выбрать длину каверны с точкой заострения, то площадь ее поперечного сечения, отнесенная к площади миделевого сечения каверны в невесомой жидкости, не зависит ни от числа кавитации, ни от числа Фруда.

Если ввести площадь миделевого сечения, то уравнению для площади произвольного сечения можно придать вид

$$\frac{S(t) - S_{\text{н}}}{S_{\text{к}} - S_{\text{н}}} = \frac{27t}{4t_l}\left(1 - \frac{t}{t_l}\right)^2,$$

где $S_{\text{н}}$ — площадь сечения срыва.

Случай $\sigma_0^2 \mathrm{Fr}^2 > \frac{4}{3} c$. Рассматривая корни уравнения $S(t) - S_н = 0$, замечаем, что существует два действительных его решения

$$\bar t_{1,2} = \frac{3}{2}\sigma_0 \mathrm{Fr}^2\left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{4c}{3\sigma_0^2 \mathrm{Fr}^2}}\right),$$

первое из которых соответствует длине каверны

$$\bar t_l = \frac{3}{2}\sigma_0\mathrm{Fr}^2\left(1-\sqrt{1-\frac{4c}{3\sigma_0^2\mathrm{Fr}^2}}\right). \qquad (3.43)$$

Вычислим значения производной в этих точках:

$$\mu \bar S'(\bar t_{1,2}) = \frac{3}{4}\sigma_0^2 \mathrm{Fr}^2 \left(1 - \frac{4c}{3\sigma_0^2\mathrm{Fr}^2} \mp \sqrt{1-\frac{4c}{3\sigma_0^2\mathrm{Fr}^2}}\right). \qquad (3.44)$$

При $\sigma_0^2 \mathrm{Fr}^2 > \frac{4}{3} c$ величина $1 - \frac{4c}{3\sigma_0^2 \mathrm{Fr}^2}$ меньше единицы, потому корень квадратный из нее больше самой величины; следовательно, $\bar S'(\bar t_1) < 0$; $\bar S'(\bar t_2) > 0$. Это значит, что минимум функции $\bar S(\bar t)$ в точке $\bar t_2$, лежащей в этом случае между точками $\bar t_1$ и $\bar t_2$, находится в области отрицательных чисел, потому собственно каверна заканчивается в точке замыкания $\bar t_2 = \bar t_l$. Площадь миделевого сечения определяется формулой (3.34) или ее модификациями, а координата $\bar t_к$ миделя — формулой (3.33).

Из формулы (3.44) следует, что при $3\sigma_0^2\mathrm{Fr}^2 = 4c$ производная функции $S(t)$ в точке t_l, соответствующей концу каверны, равна нулю. Наличие в этой точке касательной, параллельной оси каверны, свидетельствует о существовании точки заострения, которой при $3\sigma_0^2\mathrm{Fr}^2 = 4c$ оканчивается каверна.

Если же $3\sigma_0^2 \mathrm{Fr}^2 > 4c$, значение производной в точке $\bar t_l$ можно оценить, воспользовавшись разложениями при больших $\sigma_0^2 \mathrm{Fr}^2$:

$$\mu\bar S'(\bar t_l) \approx -\frac{c}{2} + \frac{c^2}{6\sigma_0^2 \mathrm{Fr}^2} \sim -\sqrt{\frac{2\mu c_x}{k}}.$$

Следовательно, угол подхода границы каверны к оси определяется в основном постоянными μ, c_x и параметром $\sigma_0^2 \mathrm{Fr}^2$.

Если режим течения таков, что параметр $\sigma_0^2\mathrm{Fr}^2$ оказывается большим, выражения для основных геометрических характеристик погружающейся каверны упрощаются. Раскладывая в ряды радикалы и ограничиваясь вторыми степенями малых параметров, получаем

$$\bar t_к = \frac{c}{2\sigma_0}\left(1+\frac{c}{4\sigma_0^2\mathrm{Fr}^2}\right) = \frac{1}{\sigma_0}\sqrt{\frac{2\mu c_x}{k}}\left(1+\frac{1}{\sigma_0^2 \mathrm{Fr}^2}\sqrt{\frac{\mu c_x}{2k}}\right),$$

$$\bar t_l = \frac{c}{\sigma_0}\left(1+\frac{c}{3\sigma_0^2\mathrm{Fr}^2}\right) = \frac{2}{\sigma_0}\sqrt{\frac{2\mu c_x}{k}}\left(1+\frac{1}{\sigma_0^2\mathrm{Fr}^2}\sqrt{\frac{8\mu c_x}{9k}}\right),$$

$$\bar S_к = 1 + \frac{c^2}{8\mu\sigma_0}\left(1+\frac{c}{3\sigma_0^2\mathrm{Fr}^2}\right) \approx \frac{c^2}{8\mu\sigma_0}\left(1+\frac{c}{3\sigma_0^2 \mathrm{Fr}^2}\right) =$$

$$= \frac{c_x}{k\sigma_0}\left(1+\frac{1}{\sigma_0^2\mathrm{Fr}^2}\sqrt{\frac{8\mu c_x}{9k}}\right). \qquad (3.45)$$

Заметим, что поскольку в невесомой жидкости

$$\bar t_{к0} = \frac{1}{\sigma_0}\sqrt{\frac{2\mu_0 c_x}{k}}, \quad \bar S_{к0} = \frac{c_x}{k\sigma_0},$$

то площадь миделевого сечения $\bar S_к$ вертикальной каверны и площадь миделевого сечения $\bar S_{к0}$ стационарной каверны в невесомой жидкости связаны приближенным соотношением

$$\bar S_к = \bar S_{к0}\left(1+\frac{2\bar t_{к0}}{3\sigma_0^2\mathrm{Fr}^2}\right), \qquad (3.46)$$

причем это соотношение справедливо при условии, что $2\bar t_{к0} < 3\sigma_0^2 \mathrm{Fr}^2$, т. е. при больших значениях параметра $\sigma_0^2 \mathrm{Fr}^2$.

Из последнего соотношения вытекает, что по мере роста влияния поля силы тяжести площадь миделевого сечения погружающейся каверны возрастает. Она в любом случае больше, чем площадь миделевого сечения каверны в невесомой жидкости. Однако формулами (3.45) и (3.46) надо пользоваться осторожно, выясняя каждый раз, в каком диапазоне находится параметр $\sigma_0^2 \mathrm{Fr}^2$.

§ 6. ГЕОМЕТРИЯ КАВЕРНЫ ПРИ ВСПЛЫТИИ

Как уже отмечалось, при всплытии функция $\sigma(t)$ в уравнении (3.7) имеет вид

$$\sigma(t) = \sigma_0 + \frac{2t}{\mathrm{Fr}_L^2},$$

где σ_0 — число кавитации, рассчитываемое по давлению на уровне кавитатора. Интегрируя уравнение

$$\mu\frac{d^2S}{dt^2} + \pi\sigma_0 + \frac{2\pi t}{\mathrm{Fr}_L^2} = 0 \qquad (3.47)$$

при начальных условиях

$$S(0) = S_н;\quad \left.\frac{dS}{dt}\right|_{t=0} = \pi R_н\sqrt{\frac{2c_x}{k\mu}}, \qquad (3.48)$$

для функции $S(t)$ получаем выражение

$$\mu\bar{S}(\bar{t}) = \mu + \frac{1}{2}c\bar{t} - \frac{\sigma_0\bar{t}^2}{2} - \frac{\bar{t}^3}{6\mathrm{Fr}^2}. \tag{3.49}$$

Напомним, что черта обозначает безразмерные величины при выборе в качестве линейного масштаба радиуса сечения срыва.

Для определения геометрических характеристик каверны при всплытии можно воспользоваться соответствующими выражениями для погружающейся каверны и знаки Fr^2 (или Fr_L^2) изменить на противоположные. Это приводит к таким соотношениям.

Положительный нуль функции $S(t) - S_н$ оказывается единственным и, следовательно, координата конца каверны определяется выражением

$$t_l = \frac{3}{4}\sigma_0\mathrm{Fr}_L^2\left(\sqrt{1 + \frac{8cR_н}{3\sigma_0^2\mathrm{Fr}_L^2}} - 1\right); \tag{3.50}$$

$$\bar{t}_l = \frac{3}{2}\sigma_0\mathrm{Fr}_L^2\left(\sqrt{1 + \frac{4c}{3\sigma_0^2\mathrm{Fr}}} - 1\right),$$

причем это решение формально существует при любых значениях чисел кавитации и Фруда.

Временная координата миделевого сечения дается следующими формулами:

$$t_к = \frac{1}{2}\sigma_0\mathrm{Fr}_L^2\left(\sqrt{1 + \frac{2cR_н}{\sigma_0^2\mathrm{Fr}_L^2}} - 1\right); \tag{3.51}$$

$$\bar{t}_к = \sigma_0\mathrm{Fr}^2\left(\sqrt{1 + \frac{c}{\sigma_0^2\mathrm{Fr}^2}} - 1\right).$$

Для площади миделевого сечения получаем соотношение

$$\mu\bar{S}_к = \mu + \frac{c\sigma_0\mathrm{Fr}^2}{2}\left[-1 + \frac{2}{3}\sqrt{1 + \frac{c}{\sigma_0^2\mathrm{Fr}^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\sigma_0\mathrm{Fr}^2}{3c}\left(\sqrt{1 + \frac{c}{\sigma_0^2\mathrm{Fr}^2}} - 1\right)\right]. \tag{3.52}$$

Вычислим производную функцию $S(t)$ в конце каверны

$$\mu\bar{S}'(\bar{t}_l) = \left(\frac{1}{2}c - \sigma_0\bar{t} - \frac{\bar{t}^2}{2\mathrm{Fr}^2}\right)_{\bar{t}=\bar{t}_l} =$$

$$= -c + \frac{3}{4}\sigma_0^2\mathrm{Fr}^2\left(\sqrt{1 + \frac{4c}{3\sigma_0^2\mathrm{Fr}^2}} - 1\right).$$

В случае $3\sigma_0^2\mathrm{Fr}^2 > 4c$ имеем оценку

$$\mu\bar{S}'(\bar{t}_l) \approx -\frac{c}{2}\left(1 + \frac{c}{3\sigma_0^2\mathrm{Fr}^2}\right).$$

При $3\sigma_0^2\mathrm{Fr}^2 < 4c$ оценка производной имеет вид

$$\mu\bar{S}'(\bar{t}_l) \approx -\frac{c}{2}\left(1 + \frac{3\sigma_0^2\mathrm{Fr}^2}{4c}\right)\frac{3\sigma_0^2\mathrm{Fr}^2}{4c}\sqrt{\frac{3\sigma_0^2\mathrm{Fr}^2}{4c}}.$$

Если же $3\sigma_0^2\mathrm{Fr}^2 \approx 4c$, то

$$\mu\bar{S}'(\bar{t}_l) \approx -c\left(1 - \frac{3\sigma_0^2\mathrm{Fr}^2}{8c}\right) \approx -\frac{c}{2}.$$

Таким образом, при любом соотношении параметров угол касательной к кривой $S(t)$ в конце каверны не превосходит величины порядка 150°. Это значит, что хвостовая часть всплывающей каверны имеет не острую, а несколько округлую, тупую часть. Об этом же свидетельствует и постоянство знака довольно большой по величине кривизны в конце каверны

$$\frac{d^2\bar{R}}{d\bar{x}^2} \approx -\frac{1}{\bar{R}}\left[\frac{c^2}{16\mu^2} + \frac{\sigma_0}{8\mu}\left(1 - 3\sqrt{1 + \frac{4c}{3\sigma_0^2\mathrm{Fr}^2}}\right)\right] \approx$$

$$\approx -\frac{c^2}{16\mu^2} - \frac{\sigma_0}{2\mu} - \frac{c}{4\mu\sigma_0\mathrm{Fr}^2}.$$

Ясно, что в этом случае и миделево сечение каверны оказывается сдвинутым ближе к концу каверны. Это вытекает из отношения

$$\frac{\bar{t}_к}{\bar{t}_l} \approx \frac{1}{2}\left(1 + \frac{c}{12\sigma_0^2\mathrm{Fr}^2}\right). \tag{3.53}$$

Если влияние поля силы тяжести невелико, то выражения для геометрических характеристик каверны можно упростить:

$$\bar{t}_к = \frac{c}{2\sigma_0}\left(1 - \frac{c}{4\sigma_0^2\mathrm{Fr}^2}\right) = \frac{1}{\sigma_0}\sqrt{\frac{2\mu c_x}{k}}\left(1 - \frac{1}{\sigma_0^2\mathrm{Fr}^2}\sqrt{\frac{\mu c_x}{2k}}\right); \tag{3.54}$$

$$\bar{t}_l = \frac{c}{\sigma_0}\left(1 - \frac{c}{3\sigma_0^2\mathrm{Fr}^2}\right) = \frac{2}{\sigma_0}\sqrt{\frac{2\mu c_x}{k}}\left(1 - \frac{1}{\sigma_0^2\mathrm{Fr}^2}\sqrt{\frac{8\mu c_x}{9k}}\right).$$

Аналогично для площади миделевого сечения

$$\bar{S}_к = \frac{c^2}{8\mu\sigma_0}\left(1 - \frac{c}{3\sigma_0^2\mathrm{Fr}^2}\right) = \frac{c_x}{k\sigma_0}\left(1 - \frac{1}{\sigma_0^2\mathrm{Fr}^2}\sqrt{\frac{8\mu c_x}{9k}}\right). \tag{3.55}$$

Сравнивая приближенные соотношения (3.45) и (3.54), (3.55) и вводя индексы «п» (погружение) и «b» (всплытие), в рамках линейного приближения получаем равенства

$$t_к^{(п)} + t_к^{(b)} = 2t_{к0}, \quad t_l^{(п)} + t_l^{(b)} = 2t_{l0}, \tag{3.56}$$

$$S_к^{(п)} + S_к^{(b)} = 2S_{к0}.$$

Эти соотношения справедливы при непременном условии, что стационарная каверна в невесомой жидкости рассчитывается по давлению на уровне кавитатора. Тогда понятно, что всплывающая каверна будет расположена ниже каверны погружающейся, т. е. в условиях повышенного давления, и поэтому ее размеры будут меньше, чем у погружающейся. Линейность изменения гидростатического давления с глубиной приводит к соотношениям (3.56): насколько геометрические характеристики у всплывающей каверны меньше, чем у стационарной, настолько они больше у погружающейся.

§ 7. ПРИМЕНЕНИЕ «ПРИНЦИПА НЕЗАВИСИМОСТИ»

Профиль длинных осесимметричных каверн, образующихся в весомой жидкости за быстродвижущимися телами, существенно зависит от ориентации оси каверны относительно направления силы тяжести. Принято считать, что при движении, близком к горизонтальному, для малых чисел кавитации σ и больших чисел Фруда Fr продольный профиль каверны близок к таковому для невесомой жидкости. Однако весомость все-таки существенно влияет на деформацию поперечных сечений в конце каверны [18].

При движении, близком к вертикальному, незначительна деформация поперечных сечений, но зато профиль каверны должен существенно отличаться от профиля в случае невесомой жидкости.

Для вычисления профиля вертикальной каверны в весомой жидкости можно воспользоваться «принципом независимости расширения поперечного сечения каверны», утверждающим, что каждое фиксированное поперечное сечение каверны расширяется по универсальному закону почти независимо от последующего и предыдущего движения кавитатора и определяется размерами, скоростью, давлением в каверне и сопротивлением кавитатора при пересечении им плоскости рассматриваемого сечения каверны. Этот принцип сам по себе есть некоторое приближение к действительности, однако надо заметить, что во многих важных случаях результаты, полученные теоретически, на основе «принципа независимости», оказываются весьма близкими к наблюдаемым в опытах. Поэтому на этой основе (в качестве первого приближения) сделана попытка рассчитать вертикальную каверну. Все исходные выводы и положения заимствованы из работы [80].

Как известно, приближенное уравнение расширения осесимметричной каверны в невесомой жидкости имеет вид (2.12)

$$\frac{W_0}{k} = \Delta P S_k = \Delta P S(t) - \frac{\varkappa}{2} \rho \Phi(t) \frac{dS}{dt}. \qquad (3.57)$$

Для тонкой каверны в уравнении (3.57) с достаточной точностью можно положить $k = \varkappa = 1$. В последнем слагаемом производная относится к некоторому поперечному сечению площадью $S(t)$, фиксированному относительно неподвижной жидкости. В соответствии с «принципом независимости» уравнение (3.57) применимо к описанию расширения каждого фиксированного относительно неподвижной жидкости поперечного сечения каверны площадью $S(t)$, если сопротивление W_0 относится к моменту прохождения кавитатором этого сечения, когда $S(0) = S_н$ и P_0 (в составе разности ΔP) есть полное абсолютное давление на той глубине, где расположено в данный момент рассматриваемое сечение.

Здесь можно напомнить, что (3.57) интерпретируется как уравнение, выражающее закон сохранения энергии при наличии силы сопротивления. Из него вытекает, что работа, затраченная кавитатором на преодоление силы сопротивления (на единице пути), равна изменению потенциальной ($\Delta PS(t)$) и кинетической $\left(-\pi\rho R\Phi(t)\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)$ энергии следа на той же единице пути. Когда площадь поперечного сечения достигает своего максимального значения $S_к = S(t_к)$, радиальная скорость расширения становится равной нулю.

Равными нулю становятся также потенциал $\Phi(t_к)$ и кинетическая энергия. Поэтому приближенно можно записать, что

$$W_0 \approx \Delta PS(t_к) = \Delta PS_к.$$

Это уравнение справедливо при условии постоянства разности давлений ΔP в течение всего времени «жизни» рассматриваемого сечения площадью $S(t)$.

В гл. 2 было показано, что приближенное значение потенциала $\Phi(t)$ можно найти, исходя из уравнений Лагранжа—Коши, пренебрегая квадратом скорости и считая, что $\Delta P = \text{const}$:

$$\Phi(t) \approx \frac{\Delta P}{\rho}(t - t_к). \qquad (3.58)$$

Здесь также использовано то, что $\Phi(t_к) = 0$.

Подставляя это выражение для $\Phi(t)$ в уравнение (3.57) и интегрируя его при условии, что $S(0) = S_н$, получаем зависимость

$$\frac{S(t) - S_к}{S_н - S_к} = \left(1 - \frac{t}{t_к}\right)^2. \qquad (3.59)$$

Уравнение (3.57), как и его интеграл (3.59), можно было бы уточнить, использовав более точное выражение потенциала $\Phi(t)$. Так, в работе [81] показано, что это уточненное выражение имеет вид

$$\Phi(t) \approx \frac{\Delta P}{\rho}(t - t_к)\left[1 - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{t}{t_к}\right)^2\right].$$

Однако, как отмечено там же, второе слагаемое в квадратных скобках в средней части каверны Рябушинского имеет порядок числа кавитации и потому при исследовании тонких каверн может быть отброшено. Вообще же зависимость (3.59) можно получить и экспериментально, обрабатывая фотографии стационарных каверн. Но значение закона (3.59) гораздо шире, оно выходит за рамки стационарных каверн и в сочетании с «принципом независимости» его можно использовать и для расчета нестационарных каверн.

Полудлину каверны $x_к$ (или время $t_к$ развития сечения до своих максимальных размеров $S_к$) можно определить из следующих прос-

тых соображений. Мы уже видели, что для стационарной осесимметричной каверны в невесомой жидкости при малых числах кавитации величину $\sigma x_к$ можно приближенно считать постоянной. В этом случае абсолютный потенциал скоростей на границах каверны

$$\Phi(x) = -\int_{\tau}^{\tau_к} v_\tau d\tau = -\int_{\tau}^{\tau_к} (V_к - V_0 \cos\alpha)\, d\tau = V_к(\tau_к - \tau) + V_0(x_к - x),$$

где $x_к$, $\tau_к$ — абсцисса и длина дуги миделевого сечения; x, τ — абсцисса и длина дуги произвольного сечения; $\cos\alpha d\tau = dx$. Отсюда находится значение потенциала скоростей в сечении срыва (на кромках кавитатора)

$$\Phi_н = \Phi(0) = -V_к\tau_к + V_0 x_к.$$

Учитывая, что $V_к = V_0\sqrt{1+\sigma}$, получаем

$$\Phi_н = -V_0\tau_к\sqrt{1+\sigma} + V_0 x_к \approx -V_0\left[\left(1+\frac{\sigma}{2}\right)\tau_к - x_к\right].$$

За время Δt потенциал скоростей изменится и станет равным

$$\Phi_н + \Delta\Phi = -V_0\left[\left(1+\frac{\sigma}{2}\right)(\tau_к + \Delta\tau_к) - (x_к + \Delta x_к)\right].$$

Сравнивая две эти формулы и учитывая, что $\Delta\tau_к \approx \Delta x_к$, имеем выражение для приращения потенциала

$$\Delta\Phi_н = -\frac{1}{2}V_0\Delta(\sigma\tau_к).$$

Эта формула показывает, что изменение потенциала скоростей на кромках кавитатора пропорционально изменению произведения числа кавитации и длины дуги миделевого сечения. Если потенциал не изменяется или изменяется слабо, то

$$\Delta(\sigma\tau_к) = 0, \quad \sigma\tau_к \approx \sigma x_к = \text{const}.$$

Если следить за расширением сечения каверны в неподвижной плоскости, через которую в момент $t = 0$ проходит сечение срыва кавитатора, то $x = V_0 t$ и

$$\sigma x_к = \frac{2\Delta P}{\rho V_0^2} V_0 t_к = \frac{2\Delta P t_к}{\rho V_0} = \text{const}.$$

Более точные исследования показывают, что

$$\frac{\Delta P t_к}{\rho R_н V_0} = a - b\sigma, \tag{3.60}$$

где a и b — некоторые постоянные. При малых числах кавитации вторым слагаемым можно пренебречь, а постоянную a считать во всех случаях универсальной постоянной, зависящей только от каверноообразующего тела.

Практический расчет каверны в продольном поле силы тяжести можно осуществить в следующем порядке. Пусть мы следим за расширением сечения вакуумной каверны, расположенного на глубине h. Все величины, относящиеся к этой глубине, будем отмечать индексом h. Тогда

$$W_h = c_x S_н \frac{\rho V_{0h}^2}{2} = \Delta P_h S_{кh}.$$

Но поскольку $\Delta P_h = P_{0h} = \rho g(h + h_a)$, где h_a — высота водяного столба, соответствующая атмосферному давлению ($h_a \approx 10$ м), то имеем

$$\frac{S_{кh}}{S_н} = \frac{c_x V_{0h}^2}{2g(h+h_a)}, \tag{3.61}$$

а из уравнения (3.60) находим

$$t_{кh} = \frac{aR_н V_{0h}}{g(h+h_a)}. \tag{3.62}$$

Представим формулу (3.59) в виде

$$S_h(t) = S_{кh}\left[1 - \left(1 - \frac{S_н}{S_{кh}}\right)\left(1 - \frac{t}{t_{кh}}\right)^2\right]. \tag{3.63}$$

Используя соотношения (3.61) и (3.62), получаем и расчетную формулу

$$\frac{S_h(t)}{S_н} = \frac{c_x V_{0h}^2}{2g(h+h_a)}\left[1 - \left(1 - \frac{2g(h+h_a)}{c_x V_{0h}^2}\right)\left(1 - \frac{g(h+h_a)t}{aR_н V_{0h}}\right)^2\right].$$

Если ввести число Фруда по диаметру кавитатора и скорости на глубине h

$$\text{Fr}_h = \frac{V_{0h}}{\sqrt{2gR_н}},$$

то формула приобретает более компактный вид

$$\frac{S_h(t)}{S_н} = \frac{c_x \text{Fr}_h^2}{(\bar h + \bar h_a)}\left[1 - \left(1 - \frac{\bar h + \bar h_a}{c_x \text{Fr}_h^2}\right)\left(1 - \frac{\bar h + \bar h_a}{2a\text{Fr}_h^2}\frac{V_{0h}t}{R_н}\right)^2\right]. \tag{3.64}$$

При постоянной скорости кавитатора расстояние от кавитатора до рассматриваемого сечения будет равно $x_h = V_{0h}t$. Если эта скорость переменна, то

$$x_h = \int_0^t V_{0h}(t)\,dt,$$

тогда число Фруда тоже будет переменным.

Отметим, что существенной особенностью изложенного выше подхода было использование условия постоянства разности давлений

Метод можно, однако, обобщить, отказавшись от этого условия. Исходя из сформулированного выше закона сохранения энергии, запишем

$$T(x, t) + E(x, t) = W_0.$$

Кинетическую энергию в соответствии с (3.57) выразим приближенной формулой

$$T = -\frac{\rho}{2}\Phi_\tau \frac{dS}{dt}.$$

Потенциальную энергию определим интегрированием

$$E = \int_0^t \Delta P dS(t) + E_0 = \int_0^t \Delta P \dot{S}(t)\, dt + E_0.$$

Тогда вместо уравнения (3.57) получим

$$-\frac{1}{2}\rho\Phi_\tau\dot{S} + \int_0^t \Delta P\dot{S} dt = W_0 - E_0. \qquad (3.65)$$

Дифференцируя это уравнение по времени, имеем

$$\Phi_\tau\ddot{S} = \left(\frac{2\Delta P}{\rho} - \frac{d\Phi_\tau}{dt}\right)\dot{S}. \qquad (3.66)$$

Производную потенциала найдем из динамического условия

$$\frac{d\Phi_\tau}{dt} = \frac{\Delta P}{\rho} + \frac{1}{2}\dot{R}^2.$$

Поскольку в средней части каверны слагаемое $\dot{R}^2$ мало (в миделевом сечении оно равно нулю), то

$$\Phi_\tau = \Phi_н + \int_0^t \frac{\Delta P}{\rho}\, dt,$$

а вместо уравнения (3.65) имеем

$$\Phi_\tau\ddot{S} = \frac{\Delta P}{\rho}\dot{S}.$$

Учитывая выражение для Φ_τ, это уравнение записываем в виде

$$\ddot{S} = \frac{\Delta P}{\rho\Phi_н}\dot{S} - \frac{\ddot{S}}{\Phi_н}\int_0^t \frac{\Delta P}{\rho}\, dt.$$

При малых значениях t вторым слагаемым справа можно пренебречь, тогда можно считать, что уравнение расширения сечений каверны имеет вид

$$\ddot{S} = \frac{\Delta P}{\rho\Phi_н}\dot{S}_0. \qquad (3.67)$$

Начальную скорость расширения вычислим из уравнения (3.65) при $t \to \infty$:

$$-\frac{1}{2}\rho\Phi_н\dot{S}_0 = W_0 = c_x S_н \frac{\rho V_0^2}{2}.$$

Следовательно,

$$\frac{\dot{S}_0}{\Phi_н} = -\frac{c_x S_н V_0^2}{\Phi_н^2}.$$

Теперь из уравнения (3.67) имеем

$$\dot{S}(t) = -\frac{c_x S_н V_0^2}{\Phi_н^2}\int_0^t \frac{\Delta P}{\rho}\, dt + C_1.$$

Постоянная C_1 определяется из условия, что $\dot{S}(t_к) = 0$:

$$C_1 = \frac{c_x S_н V_0^2}{\Phi_н^2}\int_0^{t_к} \frac{\Delta P}{\rho}\, dt.$$

Окончательно для площади сечения каверны получаем формулу

$$S(t) - S_н = \frac{c_x S_н V_0^2}{\Phi_н^2}\left(t\int_0^{t_к} \frac{\Delta P}{\rho}\, dt - \int_0^t d\tau \int_0^\tau \frac{\Delta P}{\rho}\, dt\right). \qquad (3.68)$$

Если каверна стационарна, то

$$\frac{\Delta P}{\rho} = \text{const}, \quad \Phi_н = -\int_0^{t_к} \frac{\Delta P}{\rho}\, dt = -\frac{\Delta P}{\rho} t_к. \qquad (3.69)$$

Тогда, вычислив интегралы в (3.68), найдем

$$S(t) - S_н = \frac{2c_x S_н}{\sigma}\left(\frac{t}{t_к} - \frac{t^2}{2t_к^2}\right). \qquad (3.70)$$

Отсюда получаем известную формулу для площади миделевого сечения

$$S_к = S(t_к) = S_н\left(1 + \frac{c_x}{\sigma}\right) \approx \frac{c_x}{k\sigma} S_н.$$

Поскольку

$$S_к - S_н = \frac{c_x S_н}{\sigma},$$

то, деля на это выражение уравнение (3.70), получаем еще одну необходимую формулу

$$\frac{S(t) - S_к}{S_к - S_н} = \frac{2t}{t_к}\left(1 - \frac{t}{2t_к}\right). \qquad (3.71)$$

Если каверна всплывает вертикально вверх, то

$$\frac{\Delta P}{\rho} = \frac{P_0 + g\rho V_0 t - P_к}{\rho} = \frac{\Delta P_0}{\rho} + gV_0 t.$$

Тогда значение потенциала на кромках кавитатора определяется выражением

$$\Phi_н = -\frac{\Delta P_0}{\rho} t_к - \frac{gV_0 t_к^2}{2}.$$

Вычислив интегралы, вместо уравнения (3.68) получим

$$S(t) - S_н = \frac{c_x S_н t \rho V_0^2}{\Delta P_0 t_к \left(1 + \frac{g t_к \rho V_0}{2\Delta P_0}\right)^2} \left[1 - \frac{t}{2t_к} + \frac{g t_к \rho V_0}{2\Delta P_0}\left(1 - \frac{t^2}{3t_к^2}\right)\right].$$

Если ввести число кавитации σ_0, то

$$S(t) - S_н = \frac{2c_x S_н t}{\sigma_0 t_к \left(1 + \frac{g t_к}{\sigma_0 V_0}\right)^2} \left[1 - \frac{t}{2t_к} + \frac{g t_к}{\sigma_0 V_0}\left(1 - \frac{t^2}{3t_к^2}\right)\right].$$

Здесь удобно ввести число Фруда по диаметру сечения срыва. Тогда

$$S(t) - S_н = \frac{2c_x S_н}{\sigma_0 \left(1 + \frac{\bar{x}_к}{2\sigma_0 \mathrm{Fr}^2}\right)^2} \left(\frac{t}{t_к}\right) \left[1 - \frac{t}{2t_к} + \frac{\bar{x}_к}{2\sigma_0 \mathrm{Fr}^2}\left(1 - \frac{t^2}{3t_к^2}\right)\right], \tag{3.72}$$

где $\bar{x}_к = \frac{x_к}{R_н}$ — относительная координата миделевого сечения. Из (3.72) следует (3.70), если $\mathrm{Fr}^2 \to \infty$.

Для площади миделевого сечения получим

$$\frac{S_к}{S_н} = 1 + \frac{c_x \left(1 + \frac{2\bar{x}_к}{3\sigma_0 \mathrm{Fr}^2}\right)}{\sigma_0 \left(1 + \frac{\bar{x}_к}{2\sigma_0 \mathrm{Fr}^2}\right)^2}, \tag{3.73}$$

для бесконечно малого кавитатора

$$\frac{S_к}{S_{к_0}} \approx \frac{1 + \frac{2\bar{x}_к}{3\sigma_0 \mathrm{Fr}^2}}{\left(1 + \frac{\bar{x}_к}{2\sigma_0 \mathrm{Fr}^2}\right)^2},$$

где $S_{к0}$ — площадь миделевого сечения каверны в невесомой жидкости, рассчитанная по числу кавитации σ_0.

Обозначив $\sigma_0 \mathrm{Fr}^2 = \omega$, исследуем поведение функции

$$f(\omega) = \frac{1 + \frac{2\bar{x}_к}{3\omega}}{\left(1 + \frac{\bar{x}_к}{2\omega}\right)^2}$$

на интервале $(0, \infty)$. Поскольку производная

$$f'(\omega) = \frac{\frac{\bar{x}_к}{\omega^2}\left(\frac{1}{3} + \frac{\bar{x}_к}{2\omega}\right)}{\left(1 + \frac{\bar{x}_к}{2\omega}\right)^3}$$

всюду положительна и стремится к нулю при $\omega \to \infty$, то можно заключить, что $f(\omega)$ принимает бесконечно малые значения при $\omega \to 0$ и стремится к единице при $\omega \to \infty$. Следовательно, $S_к$ всегда меньше $S_{к0}$ и, кроме того, $S_к \to S_{к0}$ при $\omega \to \infty$. Это наглядно можно проиллюстрировать на примере приближенных формул при больших значениях ω. Разлагая в ряд выражение для $S_к$ при $2\bar{x}_к \ll 3\omega$ и ограничиваясь линейными членами, получаем

$$S_к = S_{к0}\left(1 - \frac{\bar{x}_к}{3\sigma_0 \mathrm{Fr}^2}\right).$$

Второй асимптотически крайний случай малых ω при условии, что $2\bar{x}_к \gg 3\sigma_0 \mathrm{Fr}^2$, приводит к формальному приближению

$$S_к = S_{к0} \frac{8\sigma_0 \mathrm{Fr}^2}{3\bar{x}_к}\left(1 - \frac{5\sigma_0 \mathrm{Fr}^2}{2\bar{x}_к}\right).$$

Последние два выражения показывают, что по мере возрастания влияния поля силы тяжести миделево сечение каверны, поднимающейся вертикально вверх, уменьшается. При уменьшении этого влияния миделево сечение увеличивается, достигая $S_{к0}$ при $\omega \to \infty$. При этом в качестве основной характеристики влияния поля силы тяжести с учетом того, что $\sigma_0 \bar{x}_к = \mathrm{const}$, выбирается параметр $\sigma_0 \mathrm{Fr}^2$.

Из уравнения (3.72) можно найти длину каверны. Полагаем, что каверна замыкается на тело сечения $S_н$. Тогда

$$\bar{x}_l = \frac{3}{2}\sigma_0 \mathrm{Fr}^2 \left(\sqrt{1 + \frac{8\bar{x}_к}{3\sigma_0 \mathrm{Fr}^2}\left(1 + \frac{\bar{x}_к}{2\sigma_0 \mathrm{Fr}^2}\right)} - 1\right). \tag{3.74}$$

Можно было бы также убедиться, что корнем уравнения $S(t) = 0$ является $t = t_к$.

В рамках этой теории нет возможности определить независимо $\bar{x}_к$ или x_l. Приближенное значение $\bar{x}_l$ можно найти последовательны-

ми приближениями

$$\bar{x}_{l0} = 2\bar{x}_{\text{к}0},$$

$$\bar{x}_{l1} = \frac{3}{2}\,\sigma_0 \text{Fr}^2 \left(\sqrt{1 + \frac{8\bar{x}_{\text{к}0}}{3\sigma_0 \text{Fr}^2}\left(1 + \frac{\bar{x}_{\text{к}0}}{2\sigma_0 \text{Fr}^2}\right)} - 1 \right),$$

. . . .

$$\bar{x}_{l,l+1} = \frac{3}{2}\,\sigma_0 \text{Fr}^2 \left(\sqrt{1 + \frac{8\bar{x}_{\text{к}l}}{3\sigma_0 \text{Fr}^2}\left(1 + \frac{\bar{x}_{\text{к}l}}{2\sigma_0 \text{Fr}^2}\right)} - 1 \right).$$

Можно, однако, поступить по-другому, а именно: приравнять выражения для $\bar{x}_l$ из (3.74) и (3.52). Тогда получим равенство

$$\frac{1}{\sigma_0}\sqrt{2\mu c_x} = \bar{x}_{\text{к}}\left(1 + \frac{\bar{x}_{\text{к}}}{2\sigma_0 \text{Fr}^2}\right),$$

которое можно рассматривать как уравнение относительно $\bar{x}_{\text{к}}$. Его положительное решение дает значение координаты миделя в виде

$$\bar{x}_{\text{к}} = \sigma_0 \text{Fr}^2 \left(\sqrt{1 + \frac{2\sqrt{2\mu c_x}}{\sigma_0^2 \text{Fr}^2}} - 1 \right). \tag{3.75}$$

Как видим, выражение (3.75) совпадает с (3.53), что свидетельствует, с одной стороны, о правильности этих формул, а с другой—об идентичности результатов, получаемых в рамках теории тонкого тела и законов сохранения.

Если из формулы (3.75) найдем отношение $\dfrac{\bar{x}_{\text{к}}}{\sigma_0 \text{Fr}^2}$ и подставим его в выражение для площади миделевого сечения, получим еще одну формулу

$$\frac{S_{\text{к}}}{S_{\text{к}0}} = \frac{4}{3}\,\frac{1 + 2\sqrt{1 + \dfrac{c}{\sigma_0^2 \text{Fr}^2}}}{\left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{c}{\sigma_0^2 \text{Fr}^2}}\right)^2}. \tag{3.76}$$

Поскольку $c = \sqrt{\dfrac{8\mu c_x}{k}}$, то ввиду слабой зависимости величины c от чисел кавитации и Фруда можно еще раз убедиться, что основным параметром, выражающим влияние весомости на размеры каверны, является произведение $\sigma_0^2 \text{Fr}^2$. Слабая зависимость величины c от σ_0 и Fr видна из следующих соотношений. Поскольку

$$c = \sqrt{\frac{8\mu c_x}{k}} = \sqrt{\frac{8c_x}{k}\ln \chi\Lambda},$$

то, используя связь между удлинением и числом кавитации из теории стационарных каверн (3.22), получаем

$$c \approx \sqrt{\frac{4c_x \sigma_0 \Lambda_0^2}{k}} \approx \sqrt{\frac{12{,}4\, c_x}{1 + \sigma_0}}.$$

Для тупых конусов, дисков и нетонких тел $c_x = c_{x_0}(1 + \sigma_0)$, потому $c \approx 3{,}2$. Для тонких конусов $c_x \approx c_{x_0} + \frac{2}{3}\sigma_0$, откуда

$$c \approx 3{,}5\sqrt{c_{x_0}}\left[1 + \frac{\sigma_0}{2c_{x_0}}\left(\frac{2}{3} - c_{x_0}\right)\right].$$

Несмотря на приближенность данных оценок, можно все же утверждать, что по крайней мере тогда, когда весомость сказывается не слишком сильно, величина c от чисел кавитации и Фруда не зависит. Если принять в качестве постоянной c значение $c = 3$, то основные расчетные формулы приобретают уже вполне определенные зависимости

$$\bar{x}_{\text{к}} = \sigma_0 \text{Fr}^2 \left(\sqrt{1 + \frac{3}{\sigma_0^2 \text{Fr}^2}} - 1 \right),$$

$$\frac{S_{\text{к}}}{S_{\text{к}0}} = \frac{4}{3}\,\frac{1 + 2\sqrt{1 + \dfrac{3}{\sigma_0^2 \text{Fr}^2}}}{\left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{3}{\sigma_0^2 \text{Fr}^2}}\right)^2} \tag{3.77}$$

от чисел кавитации и Фруда. Длина каверны при этом вычисляется по формуле (3.74), которая теперь имеет вид

$$\bar{x}_l = \frac{3}{2}\,\sigma_0 \text{Fr}^2 \left(\sqrt{1 + \frac{4}{\sigma_0^2 \text{Fr}^2}} - 1 \right). \tag{3.78}$$

Эта формула совпадает с (3.50), если в последней положить $c = 3$.

Вычислив отношение

$$\frac{x_{\text{к}}}{x_l} = \frac{2\left(\sqrt{1 + \dfrac{3}{\sigma_0^2 \text{Fr}^2}} - 1\right)}{3\left(\sqrt{1 + \dfrac{4}{\sigma_0^2 \text{Fr}^2}} - 1\right)},$$

видим, что оно не превосходит $\sqrt{3}/3$ при самых малых значениях $\sigma_0^2 \text{Fr}^2$, т. е. при самом сильном влиянии весомости. Если это влияние невелико ($\sigma_0^2 \text{Fr}^2 \to \infty$), то

$$\frac{x_{\text{к}}}{x_l} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4\sigma_0^2 \text{Fr}^2}\right) \to \frac{1}{2}.$$

Если же влияние весомости велико (формально $\sigma_0^2 \text{Fr}^2 \to 0$), то

$$\frac{x_{\text{к}}}{x_l} = \frac{2(\sqrt{3} - \sigma_0 \text{Fr})}{3(2 - \sigma_0 \text{Fr})} \to \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Следовательно, в зависимости от влияния весомости миделево сечение каверны, поднимающейся вертикально вверх, всегда расположено ближе к ее корме, но это удаление от середины каверны невелико:

$$\frac{1}{2} < \frac{x_к}{x_l} < \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Аналогично можно было бы рассмотреть и погружающуюся каверну.

§ 8. СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ «ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ» КОНЦЕПЦИЕЙ И ГИДРОДИНАМИКОЙ ТОНКОГО ТЕЛА

По отдельным фрагментам мы уже видели принципиальную идентичность в первом приближении энергетической и асимптотической теорий, основанных на представлении каверны источниками, распределенными вдоль продольной оси. Теперь теоретически установим это, оценивая влияние кавитатора и следа за каверной на закон расширения сечений каверны, расположенных в ее средней части.

В данном исследовании тонкой осесимметричной каверны в невесомой безграничной жидкости важной составной частью является модель течения. Будем основываться на том, что кавитирующее тело (диск, конус и др.), пересекая неподвижную плоскость наблюдения, образует в ней отверстие, на границах которого возникают значительные радиальные скорости. В дальнейшем это отверстие продолжает расширяться в жидкости по инерции, преодолевая разность давлений $\Delta P = P_0 - P_к$. Скорость расширения, определяемая в основном скоростью движения кавитирующего тела, постепенно уменьшается до нуля, после чего меняет знак. В момент перемены знака скорости величина отверстия (его площадь или радиус для круговых отверстий) становится максимальной, а затем начинает убывать, и каверна схлопывается. После схлопывания каверны за ней остается кильватерный след, в котором механическая энергия, переданная кавитатором жидкости, постепенно рассеивается в ней в форме тепла.

Такая схема течения, как мы видели, легла в основу всех рассуждений первых параграфов настоящей главы. Развитая впервые еще в 50-е годы, она позволила определить геометрию каверны. Нами было показано, что геометрию каверны можно найти и иным путем, используя метод источников и асимптотическую теорию тонкого тела. Интенсивность источников $g(\xi, t)$ вдоль оси каверны определяется условием непротекания, но к дополнительным источникам, распределенным по длине каверны, надо добавить источники, отображающие и кильватерный след.

Кильватерный след за каверной обычно насыщен пузырьками газа и пара, теряемых из каверны. Если секундный объемный расход газа из каверны обозначить Q, то эквивалентное сечение газовой струи будет Q/V, а ее эффект можно моделировать источником мощности Q. Следуя Прандтлю, эффект сопротивления кавитатора $W_к$ также

можно моделировать источником мощности $Q_1 = \frac{W_к}{\rho V}$. Таким образом, физическую стационарную тонкую каверну можно приближенно представить распределенными по продольной оси ox источниками интенсивности $g(\zeta)$ с суммарной нулевой мощностью

$$\int_{L_к}^{L_к} g(\zeta)\, d\zeta = 0$$

и добавочными источниками мощности $Q + Q_1$, помещенными в области смыкания. Необходимо заметить, что точное описание контура каверны с помощью источников на оси невозможно, ибо у острых кромок срыва кривизна каверны бесконечна, здесь необходимы особенности, помещенные на ее поверхности [11]. Метод источников был использован С. С. Григоряном [36] и позже Ю. Л. Якимовым [138] для оценок формы осесимметричной каверны. Развивая этот же метод, интересные результаты получил В. В. Серебряков [110], который предложил «кольцевую модель» и нашел первое и второе приближения для контура каверны. Он показал, что эллиптическая каверна есть хорошее первое приближение, которое совпадает с результатом, полученным из энергетической теории.

Модель Эфроса с возвратной струйкой не содержит кильватерного следа, а энергия, сообщенная жидкости кавитатором, вся уносится возвратной струйкой. Однако точное решение получено только для плоской каверны. В физической каверне возвратная струйка разрушается в области смыкания, эта область пульсирует, и каверна стационарна лишь в «среднем». В результате смыкания и разрушения струйки возникает кильватерный след, о котором шла речь выше.

Идеализированным приближением к физической каверне является модель Рябушинского; каверна образуется передним кавитатором и замыкается на симметричном заднем замыкателе; суммарное сопротивление такой системы равно нулю, а кильватерный след отсутствует. Эту модель удобно использовать при исследованиях, но в действительности она не реализуется.

Цель этих рассуждений состоит в том, чтобы с единых позиций рассмотреть как энергетический принцип, так и метод гидродинамических особенностей (источников — стоков). Они показывают, что введение логарифмического потенциала в гидродинамике тонкого тела совершенно эквивалентно допущению о постоянстве суммы потенциальной и кинетической энергии единицы длины каверны.

Рассмотрим более детально, чем это было сделано ранее, кинематические и динамические условия.

Будем следить за расширением каверны в неподвижной плоскости наблюдения Σ, перпендикулярной к оси каверны ox. За интервал времени dt граница из точки пересечения o переместится в точку 1 в плоскости Σ, а частица жидкости ξ со скоростью $v(\xi, t)$ переместится в точку 2, выйдя из плоскости Σ (рис. 3.4).

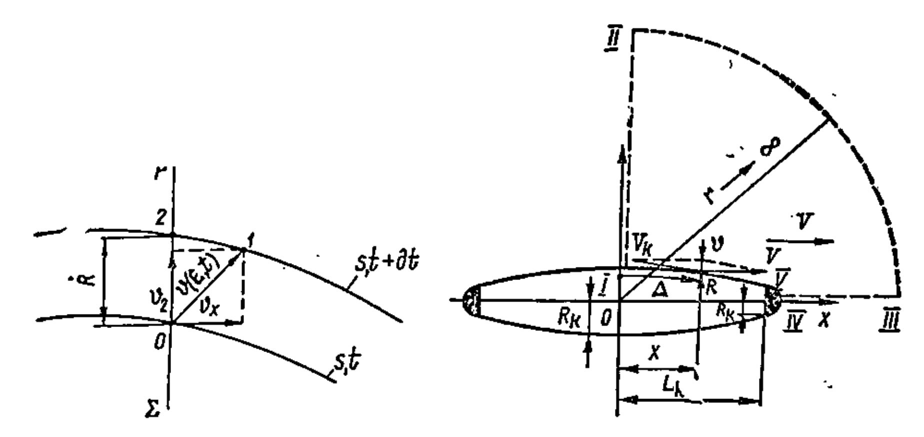


Рис. 3.4. Схема перемещения точек свободной поверхности.

Рис. 3.5. Схема каверны Рябушинского для вычисления потенциала скоростей.

Потенциал скоростей есть функция координат x, r и времени t, т. е. $\varphi(x, r, t)$. Скорости жидкости в точке o имеют вид $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = v_x$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial r} = v_r$; скорость перемещения границы каверны в плоскости Σ обозначим $\dot R = \frac{\partial R}{\partial t}$.

Очевидны следующие соотношения:

$$v_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial R}{\partial x},$$

$$v_n = \frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{\partial R}{\partial t}\cos\alpha,$$

где α — угол наклона дуги контура каверны s к оси симметрии ox; $\frac{\partial R}{\partial x} = \operatorname{tg}\alpha$.

Как известно, скорость изменения потенциала скоростей частицы ξ на s определяется формулой

$$\frac{d\varphi_s(\xi, t)}{dt} = \frac{\Delta P(\xi, t)}{\rho} + \frac{1}{2}v^2(\xi, t).$$

Для того чтобы определить потенциал скоростей на границах каверны в плоскости Σ, необходимо вернуться из точки 2 в точку 1; этот переход приведет к формуле

$$\left.\frac{d\varphi_s}{dt}\right|_\Sigma = \frac{\Delta P}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 - v_x^2 - v_r v_x \operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta P}{\rho} + \frac{1}{2}[\dot R^2 - v_x^2(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)].$$

Потенциал скоростей $\varphi_s(R, t)$ на границе каверны s в плоскости Σ

найдем, интегрируя последнее выражение. В результате получаем

$$\varphi_s = \varphi_н + \int_0^t \frac{\Delta P}{\rho}dt + \frac{1}{2}\int_0^t [\dot R^2 - v_x^2(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)]\,dt. \qquad (3.79)$$

Здесь $\varphi_н$ — потенциал на кромках кавитатора, начало отсчета времени выбрано при пересечении этими кромками плоскости Σ.

Для стационарной каверны Рябушинского, образованной одинаковыми кавитатором и замыкателем, потенциал при $t = 0$ равен $\varphi_н$, а при $t = 2t_к$ определяется из условия симметрии $\varphi = -\varphi_н$; в миделевом сечении при $t = t_к$ $\varphi_s = 0$.

В центральной части каверны Рябушинского $\dot R \sim 0$, $\operatorname{tg}\alpha \sim 0$, а скорость $v_x \approx \frac{1}{2}\sigma V$. Поэтому из интегралов (3.79) получается оценка

$$\varphi_s \approx \frac{1}{2}V^2\left(\sigma - \frac{1}{4}\sigma^2\right)(t - t_к).$$

Таким образом, второй интеграл в (3.79) в центральной части каверны имеет порядок σ^2 и при анализе с точностью до малых σ может быть отброшен.

Вообще абсолютный потенциал φ_s на границах стационарной каверны Рябушинского можно определить точно из следующих соображений. На рис. 3.5 дана схема каверны Рябушинского, проведен контур I, II, III, IV, V, I, циркуляция скорости по которому равна нулю. Для пространственной каверны при $r \to \infty$ скорость убывает как r^{-3} и интеграл касательной скорости по отрезку контура II—III имеет порядок r^{-2}. Поэтому, если потенциал при $r \to 0$ положить равным нулю, из условия симметрии вдоль отрезка I — II скорость $v_r = 0$ и потенциал в точке 1 также равен нулю. Потенциал в точке границы s имеет вид $\varphi(s) = \int_0^s v_s ds$, где v_s — проекция абсолютной скорости жидкости на границу каверны. Переносная скорость точки на границах каверны V направлена вдоль оси ox, а относительная скорость вдоль границы определяется из уравнения Бернулли, она равна $V_к = V\sqrt{1+\sigma}$ и направлена вдоль отрицательной дуги os. Поэтому абсолютная касательная скорость выражается формулой $v_s = V\cos\alpha - V\sqrt{1+\sigma}$ и, так как $\cos\alpha ds = dx$, потенциал скоростей на границах имеет вид

$$\varphi_s = V(x - s\sqrt{1+\sigma}) \approx -\frac{1}{2}\sigma x V - \frac{1}{2}V\int_0^x \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)^2 dx. \qquad (3.80)$$

Для оценки влияния второго слагаемого в выражении φ_s можно дугу контура каверны заменить параболой $R = kx^2$, где $k =$

$= \frac{R_к - R_н}{L_к^2} \sim \frac{\delta}{L_к}$ при $\sigma \to 0$. Тогда $\frac{\partial R}{\partial x} \approx -2\delta x$ и

$$\frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)^2 dx = \frac{2}{3}\,\delta^2 x^3 \frac{1}{L_к^2} = s - x = \frac{1}{6}\,\sigma x \left(\frac{x}{L_к}\right)^2.$$

Подставляя эти выражения в формулу (3.80), имеем верхнюю оценку потенциала

$$\varphi_s \approx -\frac{1}{2}\sigma x V\left(1 + \frac{1}{3}\,\bar{x}^2\right), \qquad \bar{x} = \frac{x}{L_к}.$$

На кромках кавитатора при $x = L_к$ и $\bar{x} = 1$ потенциал $\varphi_s = \varphi_н \approx \approx -\frac{2}{3}\sigma V L_к$. Для стационарной каверны $x = V(t_к - t)$, где $t_к = = \frac{L_к}{V}$, причем начало отсчета времени t принято при прохождении плоскости наблюдения Σ срывными кромками кавитатора. Используя это значение x, потенциал на границах представим так же, как функцию времени «жизни» сечения каверны:

$$\varphi_s = -\frac{\Delta P}{\rho}(t_к - t)\left[1 + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{t}{t_к}\right)^2\right].$$

Вообще потенциал скоростей на кромках срыва кавитатора выражается формулой $\varphi_s = \varphi_н \simeq -K_\varphi \frac{\Delta P}{\rho} t_к$, где K_φ находится между 1,0 и 4/3, в зависимости от того, в какой степени необходимо учитывать поправочные слагаемые.

Рассмотрим присоединенную массу $m_{кн}$ кавитатора. Определим ее по следующему известному выражению:

$$m_{кн} V = -\rho \int_{s_н} \varphi\, dc,$$

где $ds = 2\pi r \cos(\widehat{n, x})\, ds$.

Потенциал φ на поверхности кавитатора по модулю максимален в передней критической точке и монотонно убывает к срывным кромкам, где достигает значения $\varphi_н$. Поэтому $m_{кн} > -\rho\varphi_н S_н = K_\varphi \Delta P S_н t_к$. Так, для диска кавитационная присоединенная масса оценивается выражением [80]

$$m_{кн} \approx 2{,}52 \rho R_н^2,$$

поэтому теоретически для каверны Рябушинского должно быть

$$\frac{2{,}52}{\pi K_\varphi} > \frac{\sigma L_к}{R_н} = a \text{ и } \varphi_н = -\frac{1}{2}\, a V R_н \text{ при } \sigma \to 0.$$

Так как $1 < K_\varphi < 4/3$, то $a < 1{,}2 \div 1{,}6$. Однако, как указывалось выше, по экспериментальным измерениям «коэффициент потенциала» получается больше, чем $1{,}2 \div 1{,}6$, что можно объяснить влиянием кильватерного следа и некоторым «всплыванием» каверн. При развитом кавитационном течении величину кавитационной присоединенной массы, а следовательно, и величину «коэффициента потенциала» a можно приближенно считать универсальными постоянными. Это обусловлено тем, что картина абсолютных линий тока, отходящих от кавитатора, слабо зависит от умеренных ускорений $\frac{R_н}{V^2}\frac{dV}{dt} \ll 1$ кавитатора. Поэтому при всех практических расчетах кавитатор-диск и ближайшую окрестность каверны можно рассматривать как некоторый другой кавитатор, но с уменьшенным углом схода струй при радиусе $\tilde{R}_н > R_н$, причем для коэффициента сопротивления справедливо соотношение $\tilde{R}_н^2 c_{x_0} = R_н^2 c_{xв}$. Контур каверны в этой ближайшей окрестности можно построить по эмпирической формуле [80]

$$R = R_н\left(1 + \frac{3x}{R_н}\right)^{1/3}.$$

Начиная от точек $\tilde{R}_н$, наклон дуги каверны мал, и с достаточным приближением можно принять

$$\varphi_н = -\frac{\Delta P}{\rho} t_к = -\int_0^{t_к} \frac{\Delta P(t)}{\rho}\, dt = -\frac{1}{2}\, a R_н V(0).$$

Текущее значение потенциала по границам $\varphi_s(t) = -\int_t^{t_к} \frac{\Delta P(t)}{\rho}\, dt.$

Наша цель, как уже говорилось, показать идентичность различных подходов к расчету каверн и дать теоретическое обоснование принципу независимости расширения каверны, который, как известно, заключается в следующем: каждое поперечное сечение каверны расширяется относительно траектории центра тела почти независимо от последующего или предыдущего движения тела по определенному закону, зависящему только от разности давлений на бесконечности и в каверне, скорости, размеров и сопротивления тела (кавитатора) в момент прохождения им плоскости рассматриваемого сечения каверны [80] (рис. 3.6).

Закон расширения сечения каверны можно установить, используя либо асимптотическую теорию тонкого тела, либо соображения о сохранении энергии. Ниже развиты оба метода и будет показана их идентичность. Все, что говорилось до сих пор в этом параграфе, носит лишь вспомогательный и подготовительный характер. Теперь перейдем к принципу сохранения энергии.

Внешняя сила, преодолевающая сопротивление на пути кавитатора Δh, совершает работу $W_к\, \Delta h$. Исходя из физической схемы течения, приближенно можно принять, что энергия $W_к\, \Delta h$ сохраняется в рассматриваемом сечении каверны на том же отрезке Δh в форме кинетической $T\Delta h$ и потенциальной $E\Delta h$ энергий до момента схлопывания рассматриваемого сечения. Поэтому для каждого попереч-

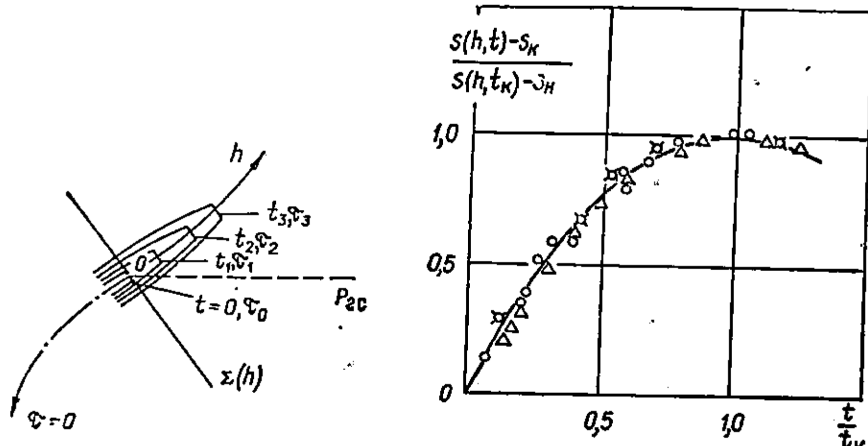


Рис. 3.6. Схема движения нестационарной каверны.

Рис. 3.7. Сравнение теоретического расчета и эксперимента.

ного сечения каверны можно написать приближенное уравнение энергии

$$T(h, t) + E(h, t) = W_к(h, 0). \qquad (3.81)$$

Очевидно, уравнение (3.81) распространяется на всю длину каверны и предполагает, что энергия, переданная кавитатором в точке траектории h, сохраняется каверной в этой точке («печатание» следа); после схлопывания каверны образуется кильватерный след и энергия постепенно рассеивается в форме тепла.

Энергию T можно выразить формулой $T = -\frac{1}{2}\rho\varphi_s 2\pi R \frac{\partial\varphi}{\partial n}$, где φ_s — абсолютный потенциал скоростей на границе; R и $\dot{R} \approx \frac{\partial\varphi}{\partial n}$ — радиус и радиальная скорость границы каверны в точке траектории h.

Потенциальную энергию сечения каверны определим как $E = \int_0^t \Delta P(h, t)\, 2\pi R\dot{R} dt + E_0$; здесь E_0 — энергия образования отверстия за кавитатором, т. е. $E_0 = \pi R_н^2 \Delta P_н$, где $R_н$ и $\Delta P_н$ — радиус кавитатора и разность давлений непосредственно за кавитатором. Энергию E_0 можно включить в сопротивление $W = W_к - E_0$. Здесь начало отсчета времени «жизни» ($t = 0$) данного сечения каверны выбрано в момент его образования у срывных кромок кавитатора. Обозначив $S = \frac{1}{2} R^2$, из (3.81) получим приближенное уравнение энергии

$$2\pi\left(-\frac{1}{2}\rho\varphi_s\dot{S} + \int_0^t \Delta P\dot{S} dt\right) = W(h, 0). \qquad (3.82)$$

Таким образом, здесь $\varphi_s = \varphi_s(h, t)$; $\dot{S} = \dot{S}(h, t)$ $\Delta P = \Delta P(h, t)$ и кинетическая энергия вычисляется по мгновенным трубкам тока,

опирающимся на расширяющееся кавитационное отверстие в неподвижной плоскости, которую пересекает по нормали к ней траектория кавитатора в точке h.

Потенциал скорости на границах расширяющегося отверстия φ_s в фиксированной точке траектории h находится из динамических граничных условий и выражается формулой (3.80). Дифференцируя (3.82) по времени, получаем

$$\frac{d}{dt}(\varphi_s\dot{S}) = 2\frac{\Delta P}{\rho}\dot{S}.$$

Используя динамическое граничное условие $\frac{d\varphi_s}{dt} = \frac{\Delta P}{\rho} + \frac{1}{2}\dot{R}^2$ и выполняя дифференцирование, имеем

$$\varphi_s\ddot{S} + \frac{1}{2}\dot{R}^2\dot{S} = \frac{\Delta P}{\rho}\dot{S}. \qquad (3.83)$$

В центральной части каверны слагаемое $\frac{1}{2}\dot{R}^2\dot{S}$ несущественно, поэтому приближенно $\varphi_s = \varphi_н + \int_0^t \frac{\Delta P}{\rho} dt$, уравнение, определяющее расширение каверны, имеет вид

$$\dot{S} = \dot{S}_0\left(1 + \frac{1}{\varphi_н}\int_0^t \frac{\Delta P}{\rho} dt\right) \text{ или } \ddot{S} = \frac{\dot{S}_0}{\varphi_н}\frac{\Delta P}{\rho}. \qquad (3.84)$$

Начальную скорость расширения $\dot{S}_0 = R_0\dot{R}_0$ определим из уравнения энергии для момента $t = 0$. Учитывая, что $\varphi_н = -\frac{1}{2} aR_н V(0)$ и $W_к - E_0 = c_x\pi R_н^2 \frac{\rho V^2(0)}{2}$, получаем

$$\dot{S}_0 = \frac{c_x R_н V}{a}, \qquad \frac{\dot{S}_0}{\varphi_н} = -\frac{2c_x}{a^2}.$$

Скорость расширения $\dot{S}$ и поперечное сечение S определяются интегрированием (3.84). В результате имеем

$$\dot{S} = -\frac{2c_x}{a^2}\int_0^t \frac{\Delta P}{\rho} dt + C_1,$$

$$S - S_0 = -\frac{2c_x}{a^2}\int_0^t dt \int_0^t \frac{\Delta P}{\rho} dt + C_1 t = -\frac{2c_x}{\rho a^2}\Delta P_{ii}(t) + C_1 t.$$

При $t = 0$ $S = S_0$. Скорость расширения $\dot{S} = 0$ при $\int_0^{t_k} \Delta P dt = -\varphi_н\rho$,

откуда найдем постоянную C_1. В результате получим

$$\dot{S} = \frac{2c_x}{a^2}\left(\int_0^{t_к} \frac{\Delta P}{\rho}\,dt - \int_0^t \frac{\Delta P}{\rho}\,dt\right) = \frac{2c_x}{a^2}\left(-\varphi_н - \int_0^t \frac{\Delta P}{\rho}\,dt\right),$$

$$S - S_0 = \frac{2c_x}{a^2}\left(-\varphi_н t - \int_0^t dt \int_0^t \frac{\Delta P}{\rho}\,dt\right). \qquad (3.85)$$

В частности, для стационарной каверны $\frac{\Delta P}{\rho} = \mathrm{const}$, после интегрирования получается известный результат

$$\frac{S - S_0}{S_к - S_0} = \left(2 - \frac{t}{t_к}\right)\frac{t}{t_к}. \qquad (3.86)$$

Если в качестве S_0 выбрать поперечное сечение, в котором наклон границы достаточно мал (несколько отступя от кавитатора — диска), то расчеты по формуле (3.86) очень хорошо согласуются с экспериментальными данными (рис. 3.7).

Полученные уравнения для расширения каверны в сущности есть обобщение известного «принципа независимости расширения каверны» на случай произвольного изменения давления $\Delta P = \Delta P(t)$. Формулы (3.85) дают первое приближение, но если учесть отброшенные слагаемые, содержащие $\dot{R}^2$, то это ни в коей мере не нарушит принцип независимости.

Предельный случай получается при $\Delta P = 0$ или $\sigma = 0$ [80]. Потенциал скоростей из (3.82) равен $\varphi_s = -\frac{W_к}{\pi\rho R\dot{R}}$; использование граничного условия на свободной поверхности приводит к дифференциальному уравнению расширения $\frac{W_к}{\pi\rho}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{R\dot{R}}\right) = \frac{\dot{R}^2}{2}$. Первый интеграл дает известное выражение скорости расширения

$$\dot{R} = \frac{\sqrt{\frac{W_к}{\pi\rho}}}{R\sqrt{\ln R + C}}. \qquad (3.87)$$

Очевидно, контур бесконечной каверны при $\Delta P = 0$ будет охватывать все контуры каверн при отличных от нуля значениях $\Delta P > 0$.

Интегрирование уравнений (3.85) и (3.87) в различных случаях дает профиль каверны первого приближения.

Подробности вывода уравнений данного параграфа, полученные несколько иным путем, можно найти в работе [80], ибо здесь лишь те же идеи распространены на более общий случай переменного давления.

Дальше посмотрим, что может дать гидродинамика тонкого тела в ее асимптотической форме.

В случае, если потенциал скоростей в ближайшей окрестности к границам каверны можно выразить формулой

$$\varphi = \dot{S}F(x, r) = \dot{S}\ln\frac{r}{\psi} \qquad (3.88)$$

при граничных условиях непротекания $\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \dot{S}\frac{\partial F}{\partial r} = \dot{R}$ для $r = R$ с использованием интеграла Коши — Лагранжа для определения ΔP на границах каверны, получим уравнение контура каверны

$$\ddot{S}F(x, R) + \frac{1}{2}\dot{R}^2 = \frac{\Delta P}{\rho}. \qquad (3.89)$$

Очевидно, что подстановка потенциала $\varphi_s = \dot{S}F(x, R)$ из (3.88) в уравнение энергии (3.83) дает то же самое уравнение (3.89).

Оценивая порядок малости [80] слагаемых уравнения Лапласа $\varphi_{xx} + \varphi_{rr} + \frac{1}{r}\varphi_r = 0$, после подстановки в него потенциала (3.88) для ближайшей окрестности центральной части осесимметричной тонкой каверны получаем

$$(\dot{S}F)_{xx} + \dot{S}F_{rr} + \frac{1}{r}\dot{S}F_r = 0.$$

Если порядок второго и третьего членов при $r \to 0$ принять равным 1, то порядок первого члена будет $\delta^2 F$.

При $\delta \to 0$ первое слагаемое не существенно, а «оборванное» уравнение Лапласа $F_{rr} + \frac{1}{r}F_r = 0$ удовлетворяется функцией $F(r) = \ln\frac{r}{\psi}$. Подстановка этой функции в уравнение (3.89) при $r = R$ и $\psi = 1$ дает

$$\ddot{S}\ln R + \frac{1}{2}\dot{R}^2 = \frac{\Delta P}{\rho}. \qquad (3.90)$$

Уравнение (3.90) есть известное уравнение С. С. Григоряна [36], полученное методом источников путем асимптотического перехода к малой окрестности около оси симметрии. Интеграл (3.90) при $\Delta P = 0$ или $\sigma = 0$ дает решение в форме (3.87), как это было указано в работе [36]. Действительно, если потенциал $\varphi_s = -R\dot{R}(\ln R + C)$, то согласно принятой схеме кинетическая энергия на единицу длины каверны будет равна сопротивлению на этой единице длины, поскольку при $\Delta P = 0$ потенциальная энергия $E = 0$. Отсюда получаем

$$T = -\frac{1}{2}\rho 2\pi R\dot{R}\varphi_s = \pi\rho(R\dot{R})^2(\ln R + C) = W,$$

а это и дает непосредственно выражение (3.87).

Получается важный вывод: принцип сохранения энергии для каждого сечения каверны и асимптотическая теория тонкого тела, примененная к каверне, дают для закона расширения каверны совершенно идентичные результаты. Эта идентичность есть следствие принятой модели течения, которое имеет выраженный радиальный харак-

тер вблизи оси, что соответствует непрырывному распределению источников.

Для области несжимаемой жидкости, ограниченной замкнутой поверхностью Σ, состоящей из одних и тех же частиц, уравнение для изменения кинетической энергии имеет вид

$$\frac{dT_\Sigma}{dt}=\iint\limits_\Sigma (P-P_\infty)V_n d\Sigma.$$

Рассмотрим вопрос о применении этого уравнения к тонкой трубке тока, опирающейся на элемент свободной поверхности каверны площадью f и простирающейся до поверхности, на которой $\varphi=0$. Кинетическая энергия частиц, заключенных в этой трубке тока, определяется формулой $T=-\frac{1}{2}\rho\varphi_s V_{ns} f$, поскольку на линиях тока l нормальная скорость равна $V_n=\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0$. Производная по времени кинетической энергии имеет вид $\frac{dT}{dt}=-\frac{1}{2}\rho\frac{d}{dt}(\varphi_s v_{ns} f)$. В произвольном случае линии тока в момент времени $t+\Delta t$ будут ограничивать область жидкости, содержащую частично другие частицы, которых в ней не было в момент времени t. Кроме того, силы давления на линиях тока при деформациях трубки тока совершают некоторую работу. Поэтому в общем случае нельзя приравнять $\frac{dT}{dt}$ мощности сил давления, развиваемой на поверхности f. Однако в тех случаях, когда поверхности тока неизменны в пространстве, поскольку работа сил давления на таких поверхностях тока и перенос частиц через них равны нулю, можно написать точное равенство

$$\frac{dT}{dt}=-\frac{1}{2}\rho\frac{d}{dt}(\varphi_s v_{ns} f)=\Delta P v_{ns} f, \qquad (3.91)$$

которое соблюдается точно при расширении сферической или цилиндрической полости в неограниченной жидкости. Для тонкой каверны, когда концы элемента поверхности f двигаются по мгновенным линиям тока, поскольку линии тока l в моменты t и $t+\Delta t$ касательны друг к другу, обмен энергией между трубками тока вблизи от f вообще незначителен. По мере удаления от поверхности вдоль трубки тока плотность кинетической энергии и давление быстро убывают и обменом энергии между ними в первом приближении можно пренебречь. Именно это обстоятельство имеется в виду для осесимметричной каверны. Использование равенства (3.91) при выводе уравнения энергии (3.82) совершенно эквивалентно использованию логарифмического потенциала в (3.90), ибо в том и другом случаях принимается неизменность поверхностей тока вблизи поверхности каверны, т. е. в той области жидкости, где содержится основная часть энергии.

На примере стационарной каверны Рябушинского проверим изложенную выше теорию (рис. 3.5). Используя выводы из уравнения энергии, интегрированием (3.85) получаем контур каверны и интенсивность источников, соответствующих этой каверне. Затем для этой интенсивности источников вычислим выражение потенциала скоростей в форме (3.88) вблизи оси симметрии x при малых r. Сравнивая потенциал (3.88) при $r=R$ с потенциалом, получаемым из граничных условий, вытекающих из интеграла Коши—Лагранжа на границах каверны s, определяем функцию F.

Для стационарной каверны в невесомой жидкости ΔP постоянно, поэтому из (3.85) получим $\dot S=\dot S_0\left(1-\frac{t}{t_к}\right)$. Проинтегрировав выражение, получим

$$S=\frac{\dot S_0 t_к}{2}\left(2\frac{t}{t_к}-\frac{t^2}{t_к^2}\right)+C.$$

Использовав условия

$$S=S_н=\frac{1}{2}R_н^2 \text{ при } t=0,\quad t=2t_к,$$

$$S=S_к \text{ при } t=t_к,$$

окончательно получаем

$$S=S_н\left[1+\frac{c_{x_0}t}{\sigma t_к}\left(2-\frac{t}{t_к}\right)\right]. \qquad (3.92)$$

Сравнивая (3.92) и (2.8) при $t=t_к$, находим $k(\sigma)=\frac{c_{x_0}(1+\sigma)}{c_{x_0}+\sigma}$. В уравнениях (3.85) и (3.92) отсчет времени t начинается от срывных кромок кавитатора при прохождении ими неподвижной плоскости наблюдения. Поместим начало координат в миделевом сечении каверны и положительную ось ox направим в сторону движения. Замечая, что в этом случае $x=L_к-Vt$ или $\bar x=\frac{x}{L_к}=1-\frac{t}{t_к}$, получаем уравнение (3.92) в виде

$$S=S_н\left[1+\frac{c_{x_0}}{\sigma}(1-\bar x^2)\right]=S_н+(S_к-S_н)(1-\bar x^2). \qquad (3.93)$$

Выражение (3.93) совпадает с известной формулой для контура каверны, если принять $S_н=S_0$.

Плотность источников на оси определяется формулой $g(\zeta)=2\pi\dot S(\zeta)=-V\frac{d(\pi R^2)}{dx}=2\pi g_0\bar\zeta$, где $g_0=\frac{R_к^2 V}{L_к}$; $\bar\zeta=\frac{\zeta}{L_к}$; ζ — абсцисса элементарного источника.

Потенциал скоростей в точке (x, r) имеет вид

$$\varphi(x,r)=-\frac{1}{2}\int\limits_{-L_к}^{L_к}\frac{g(\zeta)\,d\zeta}{\sqrt{(\zeta-x)^2+r^2}}\approx\dot S\left(1+\ln\frac{r}{2\sqrt{L_к^2-x^2}}\right)=F(x,r). \qquad (3.94)$$

Особо следует оговорить, что выражение потенциала (3.94) справедливо лишь в центральной части каверны, в области, где $r\ll L_к-x$.

Обтекание потоком отрезка с линейным распределением источников $g(\zeta) = 2\pi g_0 \frac{\zeta}{L_к}$ соответствует обтеканию эллипсоида вращения с фокусами в точках $\pm L_к$. Формула (3.94) при $\sigma \to 0$ дает эллиптическую каверну, при этом функция F есть постоянная величина. Воспользовавшись формулой (3.94), найдем функцию F для отличных от нуля чисел кавитации, подставив S в выражение $F(x, R)$ из (3.94). Выполнив подстановку, получим

$$F(x, R) = \frac{1}{2} \ln \left\{ \left[\frac{S_н}{2L_к^2 (1 - x^2)} + \frac{S_к \left(1 - \frac{S_н}{S_к}\right)}{2L_к^2} \right] e^2 \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left\{ \left[\frac{\sigma^2}{2a^2 (1 - \bar{x}^2)} + \frac{\varepsilon^2}{4} \left(1 - \frac{\sigma}{c_x}\right) \right] e^2 \right\}, \quad \bar{x} < 1.$$

При малых числах кавитации для всей центральной части каверны функция F практически постоянная величина: $F_0 = \frac{1}{2} \ln e^2 \frac{\varepsilon^2}{4}$.

Из условия постоянства давления согласно формуле (3.80) потенциал скоростей на границах каверны имеет вид

$$\varphi_s = -V(s\sqrt{1 + \sigma} - x) \approx -\frac{1}{2} \sigma V x, \qquad (3.95)$$

где s — длина дуги контура каверны до точки x. Сравнивая потенциал (3.88) при $r = R$ и потенциал, выражаемый формулой (3.95), получаем уравнение, связывающее число кавитации σ с «параметром тонкости» каверны ε. Имеем

$$\varphi_s = \dot{S} F_0 = \frac{\dot{S}_0}{L_к} x F_0 = \frac{R_к^2}{L_к^2} x V F_0 = -\frac{1}{2} x \sigma V, \qquad (3.96)$$

откуда

$$\varepsilon^2 \ln \frac{4}{e^2 \varepsilon^2} = \sigma. \qquad (3.97)$$

Поскольку $\varepsilon = \frac{R_к}{L_к}$ и $R_к$ определяется точно, то формула (3.97) дает связь σ и $L_к$. Однако это справедливо лишь в области, где $R_к \ll L_к - x$.

Формула (3.97) весьма близка к формуле (3.22), что хорошо видно, если переписать ее для удлинения

$$\frac{2}{\Lambda^2} \ln \frac{2\Lambda}{e} = \sigma.$$

Отличие заключается лишь в том, что если в формуле (3.22) под знаком логарифма стоит функция $\chi(\sigma) \approx 0{,}6 + \sigma$, то в формуле (3.97) она равна постоянной $2/e$. Пределы применимости формулы (3.97) такие же, как и у формулы (3.22).

В целом исследование, проведенное для каверны Рябушинского, иллюстрирует тезис об идентичности энергетической теории и асимптотической, основанной на методе источников.

В заключение сделаем следующее замечание. Для стационарной каверны Рябушинского приближенное уравнение энергии можно найти, используя точное выражение сопротивления кавитатора, получаемое с помощью теоремы импульсов. Теорема импульсов вместе с уравнениями непрерывности и Бернулли приводит к известной формуле

$$W_к = \pi R^2(x) \underbrace{(P_0 - P_к)}_{\Delta P} - \underbrace{\int_{R(x)}^{\infty} \frac{\rho v_x^2}{2} 2\pi r dr}_{I_x(x)} + \underbrace{\int_{R(x)}^{\infty} \frac{\rho v_r^2}{2} 2\pi r dr}_{I_r(x)}.$$

Интегралы $\dot{I}_x$ и $\dot{I}_r$ берутся по бесконечным плоскостям, пересекающим каверну в точке x.

Вследствие постоянства давления в каверне возмущенная скорость v_x почти постоянна вблизи центральной части каверны; на больших расстояниях $r > L_k$ экстремальность v_x в миделевой плоскости приводит к аналогичному выводу. Кроме того, известно, что $\pi R_к^2 \Delta P - \dot{I}_x = k\pi R_к^2 \Delta P$, где $k \approx 0{,}96 \div 1{,}00$. Поэтому для центральной части каверны приближенно можно полагать $k \approx 1$.

Величину $\dot{I}_r$ оценим, вычислив интеграл по частям. Замечая, что $d\varphi = v_r dr$ и, кроме того, $v_r = -V \frac{\partial R}{\partial x} \approx \dot{R}$ для $r = R$, находим

$$\dot{I}_r(x) = -\pi\rho \dot{R} R \varphi(R) - \pi\rho \int_R^{\infty} \varphi d(v_r r).$$

В ближайшей окрестности тонкого тела потенциал $\varphi(x, r) \approx \approx R\dot{R} \ln \frac{r}{\psi}$ и $d(v_r r) \approx 0$. В удаленных точках (начало координат — в центре) $\varphi \approx -\frac{V O_к x}{4\pi r^3}$, поэтому $v_r r = \frac{3 V O_к x}{4\pi r^3} < R\dot{R}$. Значит,

$$\pi\rho \int^{\infty} \varphi d(v_r r) = \pi\rho \int_{v_r r}^{0} \frac{1}{3} u du = -\frac{\pi\rho}{6} (v_r r)^2.$$

Таким образом, оценку интеграла $I_r(x)$ можно представить формулой

$$\dot{I}_r(x) = -\pi\rho R\dot{R}\varphi_s + \pi\rho\eta (R\dot{R})^2.$$

Число η определяется неравенством $1 < \eta < \frac{1}{6}$, если положить $\eta = \ln \chi$, то интеграл $I_r(x)$ и кинетическая энергия $T = -\pi\rho R\dot{R}\varphi$ для

тонкого тела связаны соотношением $\dot{I}_r(x) = -\pi\rho(R\dot{R})^2 \ln\frac{R}{\chi\psi}$, где $1 < \chi < 1{,}18$. Ясно, что множитель χ никакой роли в теории каверн играть не может, ибо $F(x) = \ln\frac{R}{\chi\psi} = F_0 + \frac{1}{2}x^2F''$ почти постоянна в центральной части каверны, а эта постоянная находится из условия согласования контура с миделевым сечением и кавитатором, определяемыми независимо.

Оценки влияния кавитатора и следа выполним также для каверны Рябушинского. В центральной части каверны (малые $\bar{x}$), обтекаемой потоком со скоростью V в сторону отрицательной оси ox, возмущенная скорость на границе v_{xh} приближенно равна $-\frac{1}{2}\sigma V$. Оценим вклад кавитатора и следа в эту скорость.

Суммарная мощность источников, имитирующих кавитатор, выражается формулой $g_к = 2\pi S_н V$, расстояние кавитатора от центра каверны порядка $L_к$. Отсюда добавочная скорость, возбуждаемая кавитатором, имеет порядок

$$\Delta v_x \approx -\frac{\pi R_н^2 V}{4\pi L_к^2} = -\frac{V}{4a^2}\sigma^2 \approx -\frac{1}{9}\sigma^2 V. \quad (3.98)$$

След имитируется источником $Q^* = \frac{W}{\rho V}$. Поскольку возмущенная скорость от источников, помещенных в конце каверны, направлена вперед, имеем

$$\Delta v_x = \frac{Q^*}{4\pi L_к^2} = \frac{c_{x_0}(1+\sigma)}{8a^2}\sigma^2 V. \quad (3.99)$$

Эквивалентное сечение газовой струи за счет поддува обычно составляет несколько процентов от площади миделевого сечения каверны.

Из формул (3.98) и (3.99) следует, что эффекты кавитатора и следа за каверной в центральной части каверны, где собственно и справедлива асимптотическая теория, имеют порядок σ^2, тогда как правая и левая части уравнений (3.89) и (3.90) имеют порядок σ. Таким образом, добавочные слагаемые, введенные Ю. Л. Якимовым [138] к уравнению С. С. Григоряна с целью его уточнения, также имеют порядок σ^2 по сравнению с порядком σ для основных слагаемых уравнения Григоряна. Из изложенного следует, что это «уточнение» излишне и его можно отбросить. Поэтому энергетическая и асимптотическая теории тонкого тела вполне идентичны в приложении к тонкой осесимметричной каверне. Уточнения, введенные Якимовым и состоящие в добавочном учете возмущений от кавитатора и следа, как видно из ранее изложенного, имеют порядок σ^2. Поскольку при выводе основного уравнения расширения каверны члены такого порядка малости были опущены, эти уточнения излишни.

Принцип независимости расширения каверны может быть распространен на все случаи движения кавитатора при постоянном и переменном давлении внутри.

Развитая теория каверны охватывает главные факторы, управляющие расширением ее сечений; именно этим объясняется хорошее совпадение с экспериментальными данными и «принципа независимости расширения», и многих расчетов для самых различных случаев стационарных и нестационарных движений.

§ 9. АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

При исследовании решений дифференциального уравнения (3.23) был описан общий вид меридиана каверны в различных случаях течений, а форма каверны показана схематически. Рассмотрим этот же вопрос на конкретных примерах, относящихся к течениям с малыми числами кавитации. На рис. 3.8, 3.9 даны профили каверн, образующихся за диском, который движется вертикально вниз с постоянной скоростью. Фактически здесь приведены лишь половинки каверн, поскольку они симметричны относительно оси t. Каждый рисунок соответствует одному числу кавитации, рассчитанному на уровне кавитатора. Числа Фруда, вычисленные по диаметру кавитатора, взяты различными. Предполагалось, что каверна замыкается на некоторое твердое сечение, радиус которого равен или больше радиуса кавитатора. Заштрихованные пластинки как раз и изображают эти замыкатели.

Из рисунков видно, что по мере уменьшения числа Фруда (если помнить, что бесконечно большому числу Фруда соответствует кавитационное течение в невесомой жидкости) длина каверны быстро растет и четко замыкается на замыкатель, равный кавитатору. Меридиан каверны всюду выпукл, миделево сечение все более смещается к кавитатору, совсем незначительно увеличиваясь.

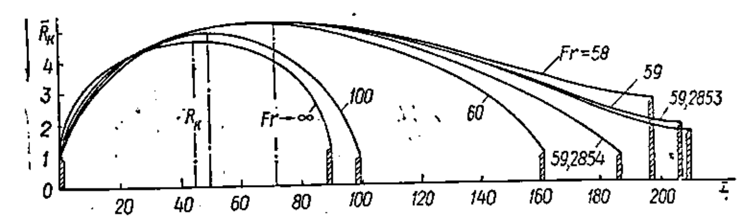


Рис. 3.8. Меридианы вертикальных каверн при $\sigma=0{,}04$ и различных числах Фруда.

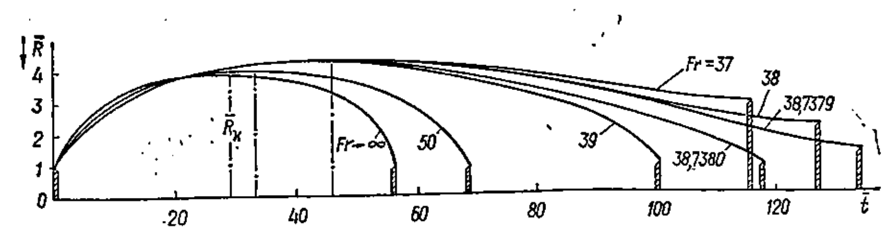


Рис. 3.9. Меридианы вертикальных каверн при $\sigma=0{,}06$ и различных числах Фруда.

Строго выпуклая каверна наблюдается лишь до определенного значения числа Фруда, которое при данном числе кавитации определяет предельную каверну с точкой заострения. Около этого значения каверна весьма «чувствительна» к совершенно незначительным изменениям числа Фруда. Так, при числе кавитации $\sigma \leqslant 0{,}02$ уменьшение числа Фруда на одну тысячную ведет к тому, что вместо обычной замкнутой каверны получается фактически разомкнутая каверна (ее горловина больше кавитатора вдвое), причем если замкнутая каверна строго выпуклая, то разомкнутая — с точкой перегиба. Это, видимо, отражает тот физический факт, что каверна с точкой заострения осуществляется практически скачком ее длины и, следовательно, объема. Длина предельной каверны в несколько раз превосходит длину каверны в невесомой жидкости, рассчитанную при том же числе кавитации, и это различие тем больше, чем меньше число кавитации. Так, при $\sigma = 0{,}04$ она больше вдвое, а при $\sigma = 0{,}01$ — уже почти втрое.

Характер зависимости длины каверны от числа Фруда при фиксированных числах кавитации дают графики рис. 3.10, показывающие, что касательная к кривой $x_l = x_l\,(\mathrm{Fr})$ для предельных каверн вертикальна. Это, кстати, видно и из формулы для длины каверны: производная по числу Фруда в определенных точках терпит разрыв. Отметим, что очень похожие кривые для сравнительно больших чисел кавитации приведены в работе [39].

Выше уже отмечалось, что для предельных каверн числа кавитации и Фруда не могут быть произвольными; для фиксированного числа кавитации существует лишь одно вполне определенное число Фруда, при котором существует каверна с точкой заострения. Эти предельные и, вообще говоря, минимальные числа связаны некоторым соотношением. В нашей теории оно имеет вид

$$\omega^2 = \frac{8}{3}\sqrt{c_x}\,\ln\frac{3\left(1+\frac{3}{5\sigma_0}\right)\omega^2}{4\sqrt{1+\frac{32c_x}{27\sigma_0}}}, \quad \omega = \sigma_0\,\mathrm{Fr}_d.$$

Эта зависимость, показанная на рис. 3.11, построена при $c_x \approx \approx 0{,}82\,(1+\sigma_0)$. Точки (σ_0, Fr), лежащие на кривой, соответствуют предельным кавернам. Всем точкам, находящимся правее и выше указанной кривой, отвечают обычные замкнутые каверны. Если же точка окажется ниже и слева, замкнутой каверны для этих значений чисел кавитации и Фруда не существует.

Заметим, что кривая $\sigma_0 = \sigma_0\,(\mathrm{Fr})$ для предельных каверн почти гиперболическая. Она такова по своей природе, ибо получится из соотношения $\sigma_0^2\mathrm{Fr}^2 = \frac{4}{3}c$, где $c = 2\sqrt{\frac{2\mu c_x}{k}}$; $\mu = \ln\chi\Lambda$. Так как сама величина c меняется мало, зависимость числа кавитации от числа Фруда гиперболическая. Такой же она является и для длины предельной каверны, что следует из формулы для длины в этом случае.

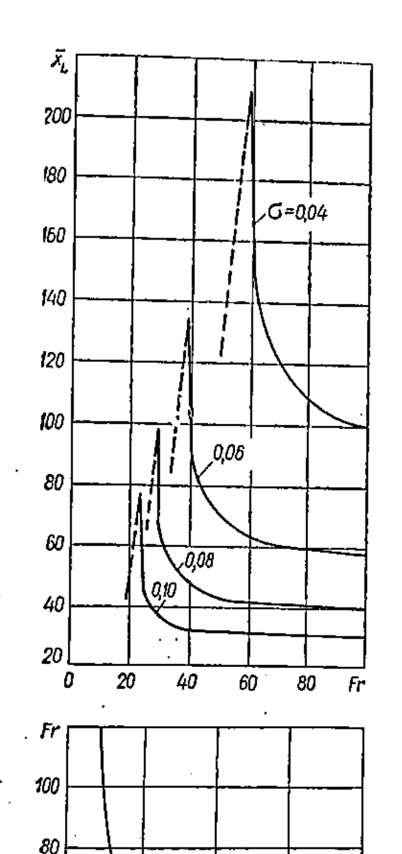


Рис. 3.10. Зависимость длины вертикальной каверны при погружении от числа Фруда при различных числах кавитации.

Рис. 3.11. Зависимость между числами кавитации и Фруда для предельных замкнутых вертикальных каверн. Звездочками отмечены результаты работы [39].

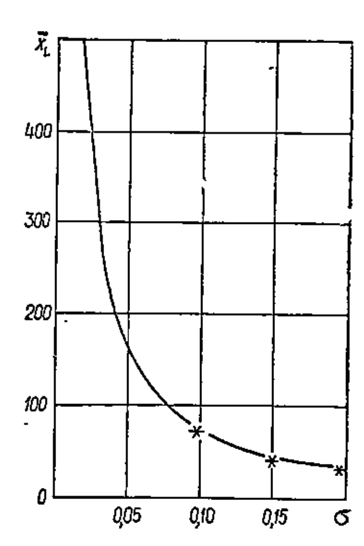


Рис. 3.12. Зависимость относительной длины вертикальной предельной каверны от числа кавитации.

Это видно и на рис. 3.12, на котором звездочками отмечены значения, заимствованные нами из работы [39].

Предельная кривая $\sigma_0 = \sigma_0\,(\mathrm{Fr})$, как и график $x_l = x_l\,(\mathrm{Fr})$, показанные на рис. 3.11, 3.12, построены при условии, что $c_x = 0{,}82\,(1+\sigma)$. Это значит, что они соответствуют кавитационному обтеканию диска. Можно было бы построить также кривые и для случая обтекания других тел. Так, в работе [92], исходя из несколько других предпосылок, построена кривая $\sigma_0 = \sigma_0\,(\mathrm{Fr})$, соответствующая обтеканию тонкого конуса. Она также имеет явно выраженный гиперболический

характер. Следует только предостеречь читателя, что в работе [92] число Фруда определялось по длине системы кавитатор + каверна + + замыкатель. Поэтому на графике появился дополнительный множитель, а не чистое число Фруда.

Как видно, численные результаты настоящего параграфа относятся к случаю движения кавитатора вниз, вдоль вектора силы тяжести. Числовые данные в противоположном случае здесь не приводятся; их можно найти в работах [40, 92, 93]. Например, [92] детально анализируется форма вертикальной каверны при обтекании тела нисходящим потоком. Отмечается возможное существование точки перегиба вблизи сечения срыва в течениях с отрицательными числами кавитации. Показано, что у каверны за донным срезом при любом отрицательном числе кавитации существует точка перегиба.

ГЛАВА 4

КРЫЛО МАЛОГО УДЛИНЕНИЯ ВБЛИЗИ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЫ

Теория тонкого тела, положенная в основу изложенных в предыдущих главах методов расчета формы каверны, может быть применена и к расчету гидродинамических характеристик крыльев, движущихся вблизи криволинейных границ жидкости.

Исследованию взаимодействия крыльев с плоскими границами посвящено большое число работ, например [10, 34, 49, 96].

Здесь, как правило, предварительно строится решение уравнения Лапласа, точно удовлетворяющее условиям, заданным на рассматриваемой плоской границе, после чего остается удовлетворить только условию непротекания на крыле.

В случае криволинейных границ общего вида построить такое решение, как правило, не удается, и исследователю приходится одновременно заботиться об удовлетворении условий как на крыле, так и на границе жидкости. Поэтому резко возрастает ценность приближенных методов расчета, разработке которых и посвящена бо́льшая часть публикаций. Допущения, используемые при приближенном решении задачи, различны у разных авторов, соответственно различны и области применимости результатов.

Изложенные в настоящей главе результаты получены на основе допущений, которые обычно используются при расчете обтекания крыльев малого удлинения и других тел с большим отношением длины к ширине. Применение их позволило существенно упростить задачу и, использовав некоторые известные решения, свести расчет гидродинамических характеристик к вычислению определенных интегралов от функций, значения которых легко вычисляются [103].

Полученные таким путем результаты справедливы при достаточно общих предположениях относительно формы крыла и границы. В частности, здесь не требуется, чтобы изменения отстояния крыла от границы были малы по сравнению со средней величиной этого расстояния, как это предполагается в некоторых других методах решения.

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваемое крыло представляет собой тонкую несущую поверхность $\Sigma_к$ (рис. 4.1) с хордой B_0 и размахом $2L_0$. Оно движется заданным образом в идеальной несжимаемой жидкости плотности ρ вбли-

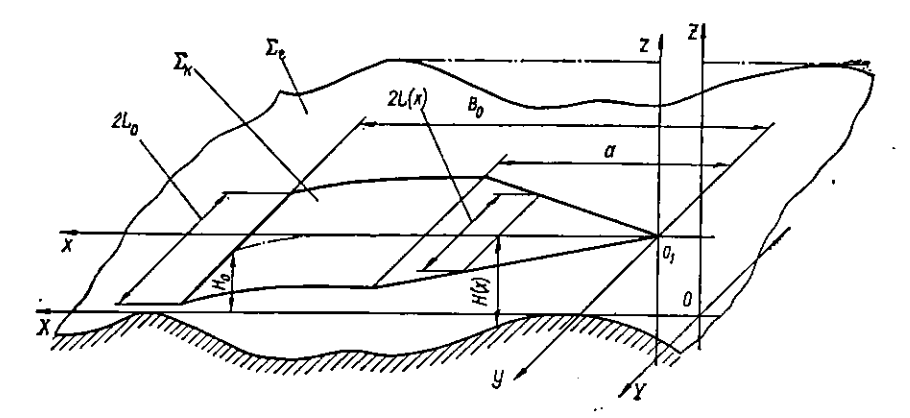


Рис. 4.1. Крыло в ограниченной жидкости.

зи поверхности $\Sigma_г$, являющейся одной из границ занимаемой этой жидкостью области. На поверхности $\Sigma_г$ должны выполняться некоторые физические условия (например, условие непротекания или условие постоянства давления).

Введем две системы координат: связанную с поверхностью $\Sigma_г$ инерциальную систему $OXYZ$ и систему O_1xyz, связанную с крылом $\Sigma_к$. В дальнейшем первую систему координат будем называть неподвижной, вторую — «связанной». Начало неподвижной системы поместим на поверхности $\Sigma_г$ или вблизи нее, ось OX направим вдоль этой поверхности в сторону, противоположную направлению движения крыла, ось OZ—внутрь занимаемого жидкостью объема.

В этой системе координат форма поверхности $\Sigma_г$ задана уравнением вида

$$Z_г = F_г(X, Y, t).$$

Начало связанной системы координат o_1 поместим в середине передней кромки крыла, ось o_1x направим по хорде назад, ось o_1y — параллельно размаху.

Форма крыла в плане задана уравнением $y = \pm L(x)$, а форма его поверхности — уравнением

$$z_к = F_к(x, y, t).$$

В силу предположения об идеальности жидкости для рассматриваемого течения существует потенциал скорости $\Phi(X, Y, Z)$, который удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial Z^2} = 0 \tag{4.1}$$

во всем объеме, занятом жидкостью, кроме самого крыла и образующегося за ним вихревого следа. Должны выполняться следующие граничные условия:

1) условие непротекания на поверхности крыла

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = W_{nк},$$

где $W_{nк}$ — проекция скорости заданной точки крыла на нормаль к его поверхности;

2) постулат Жуковского—Чаплыгина об ограниченности скорости на задней кромке крыла;

3) заданные условия на поверхности $\Sigma_г$;

4) перед крылом вызванные его движением скорости жидкости должны стремиться к нулю.

Ниже будут рассматриваться только крылья малого удлинения, движущиеся при малых углах атаки. В этом случае скорость любой точки крыла $\vec{V}$ может быть представлена в виде суммы постоянного вектора $\vec{V}_0$ и малой добавки $\Delta\vec{V}(x, y, t)$. Отношение $\frac{\Delta V}{V}$ и угол между вектором $\vec{V}_0$ и поверхностью крыла считаем малыми величинами порядка ε_1, а отношение полуразмаха крыла L_0 к хорде B_0 — порядка ε_2; производная $\frac{dL(x)}{dx}$ также должна быть величиной порядка ε_2.

Аналогичные ограничения будут наложены на форму и характер движения поверхности $\Sigma_г$.

§ 2. КРЫЛО МАЛОГО УДЛИНЕНИЯ У НЕПОДВИЖНОЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Рассмотрим случай, когда поверхность $\Sigma_г$ неподвижна и непроницаема, ее форма не изменяется в направлении, перпендикулярном направлению движения крыла, а последнее движется без крена и скольжения и не закручено, т. е. угол атаки не меняется вдоль размаха.

В этом случае поверхности $\Sigma_г$ и $\Sigma_к$ могут быть заданы уравнениями вида

$$Z_г = F_г(X), \tag{4.2}$$

$$Z_к(x, t) = H_c(t) - \vartheta(t)(x - x_c) + F_к(x),$$

где H_c — координата точки крыла $x = x_c$ в неподвижной системе координат; ϑ — угол между осью ox и хордой крыла.

Предполагается, что величины $\vartheta(t)$, $\frac{1}{V_0}\frac{dH_c}{dt}$ и $\omega = \frac{B_0}{V_0}\frac{d\vartheta(t)}{dt}$ являются малыми порядка ε_1.

Поверхность $\Sigma_г$ предполагается пологой

$$\beta_г(X) = \frac{dF_г}{dX} = O(\varepsilon_2).$$

С принятой в линейной теории степенью точности граничные условия для потенциала скорости Φ на поверхностях $\Sigma_г$ и $\Sigma_к$ запишутся в виде

$$\frac{d\Phi}{dz} = 0 \text{ при } Z = Z_г,$$

Рис. 4.2. Плоскость поперечного обтекания.

$$\frac{d\Phi}{dZ} = W_к \text{ при } Z = Z_к,$$

где $W_к$ — проекция скорости рассматриваемого сечения крыла на ось OZ:

$$W_к = \frac{dH_c}{dt} - \frac{d\vartheta}{dt} x - V_0 \left[\vartheta(t) - \frac{dF_к(x)}{dx} \right]. \tag{4.3}$$

Допущения о том, что удлинение крыла мало, а поверхность пологая, позволяют принять гипотезу плоских сечений, перпендикулярных направлению движения, т. е. считать, что производная $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2}$ в (4.1) является малой величиной порядка ε_2^2 и потенциал скорости Φ приближенно удовлетворяет двухмерному уравнению Лапласа в плоскости YZ:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Z^2} = 0. \tag{4.4}$$

Введем вспомогательную плоскость ξ, η и вспомогательный потенциал $\psi(\xi, \eta; h)$, удовлетворяющий уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = 0$$

в полуплоскости $\eta > 0$, разрезанной по отрезку $\eta = 2h$, $|\xi| < 1$, и граничным условиям

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0 \text{ при } \eta = 0,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = -1$$

на указанном отрезке (рис. 4.2).

Функция ψ представляет собой решение плоской задачи о приближении пластинки к твердой стенке, причем ширина пластинки равна 2, расстояние до стенки — $2h$, а скорость приближения — 1. Эта задача решена (см. § 4 данной главы).

Легко проверить, что потенциал вызванной скорости при движении крыла можно представить через функцию ψ следующим образом:

$$\Phi(X, Y, Z, t) = -W(X, t) L(X) \psi[\xi, \eta, h],$$

где

$$\xi = \frac{Y}{L(X)}; \quad \eta = \frac{Z - Z_г}{L(X)}; \quad h = \frac{Z_к - Z_г}{2L(X)}. \tag{4.5}$$

Используя (4.5), можно получить общее выражение для гидродинамических сил, действующих на несущую поверхность.

В системе координат $OXYZ$, неподвижной относительно жидкости, выражение для давления имеет вид

$$p = C - \frac{\rho}{2}(\Phi_X^2 + \Phi_Y^2 + \Phi_Z^2) - \rho \Phi_t.$$

Поскольку крыло тонкое, а угол атаки мал, величины Φ_X, Φ_Y, Φ_Z малы и их квадратами можно пренебречь и принять приближенное выражение для разности Δp давлений на верхней и нижней поверхностях крыла:

$$\Delta p = p_- - p_+ = \rho(\Phi_{t+} - \Phi_{t-}), \tag{4.6}$$

где p_- и p_+ — давление на нижней и верхней поверхностях крыла; Φ_+ и Φ_- — значения потенциала скорости на верхней и нижней поверхностях крыла соответственно.

Дифференцируя (4.5) по времени и принимая во внимание, что

$$X = x - V_0 t, \quad \frac{dh}{dt} = \frac{1}{2L}\frac{dH}{dt} = \frac{W}{2L^2} - V_0 \frac{H}{2L^2}\frac{dL}{dx},$$

находим

$$\Phi_t(X, Y, Z, t) = [-W_t(x, t) L(x) - W(x, t) V_0 L_x(x)] \psi(\xi, \eta; h) +$$
$$+ W(x, t) L(x) \left\{ \frac{\partial \psi(\xi, \eta; h)}{\partial \xi} \frac{Y}{L^2(x)} V_0 L_x(x) + \right.$$
$$+ \frac{\partial \psi(\xi, \eta; h)}{\partial \eta} \left[\frac{Z - Z_к(X, t)}{L^2(x)} V_0 L_x(x) - \frac{W(x, t)}{L(x)} \right] +$$
$$\left. + \frac{\partial \psi(\xi, \eta; h)}{\partial h} \left[\frac{Z_к(x, t) - Z_г(X)}{2L^2(x)} L_x(x) - \frac{W(x, t)}{2L(x)} \right] \right\}.$$

Выражение для разности давлений на крыле имеет вид

$$\Delta p = \rho \{ -(W_t L + V_0 W L_x)[\psi_+(\xi, h) - \psi_-(\xi, h)] +$$
$$+ W \left[(\psi_+ - \psi_-) \frac{Y}{L} L_x V_0 + (\psi_{h+} - \psi_{h-}) \left(\frac{1}{2} \frac{Z_к - Z_г}{L} - \frac{W}{2} \right) \right] \}, \tag{4.7}$$

где ψ_+ и ψ_- — значения функции ψ соответственно на верхней и нижней поверхностях крыла; ξ и h — зависят от L, следовательно, являются функциями от x.

Интегрируя по размаху, получаем подъемную силу на единицу хорды крыла:

$$\frac{dR_n}{dx} = -\rho L \{ [W_t L + W V_0 L_x] M_1(h) -$$
$$- W \left[M_2(h) V_0 L_x - M_3(h) \left(\frac{W}{2} - \frac{Z_к - Z_г}{2L} V_0 L_x \right) \right] \}, \tag{4.8}$$

где $M_1(h) = \int_{-1}^{+1} [\psi_+(\xi, h) - \psi_-(\xi, h)] d\xi,$

$$M_2(h) = \int_{-1}^{+1} [\psi_{\xi+}(\xi, h) - \psi_{\xi-}(\xi, h)] \xi d\xi, \tag{4.9}$$

$$M_3(h) = \int_{-1}^{+1} [\psi_{h+}(\xi, h) - \psi_{h-}(\xi, h)] d\xi = -\frac{dM_1(h)}{dh}.$$

Интегрированием по частям получим

$$M_2(h) = -M_1(h).$$

Тогда для суммарной подъемной силы находим

$$R_n = -\rho \int_0^{B_0} \left[(W_t L + W V_0 L_x) M_1 + W \left(\frac{W}{2} - \frac{Z_к - Z_г}{2L} V_0 L_x \right) M_3 \right] L dx. \tag{4.10}$$

Формула для продольного момента относительно точки $x = x_c$ будет отличаться от (4.10) наличием множителя $x - x_c$ под интегралом.

Отметим, что в выражение для перепада давлений на крыле (4.7) явным образом не входит угол наклона границы $\beta(X)$.

Тот же результат получим, рассматривая течение в связанной системе координат. В этом случае выражение для давления имеет вид

$$p = p_\infty - \rho(\Phi_t + V_0 \Phi_x).$$

Легко проверить, что от величины угла β зависят только слагаемые вида

$$\frac{1}{2} W \frac{\partial \phi}{\partial h} \frac{dh}{dx},$$

которые входят в производные Φ_t и Φ_x с противоположными знаками. Поэтому окончательное выражение для перепада давлений от угла наклона границы не зависит и совпадает с (4.7).

Отсюда, в частности, следует, что участок крыла, имеющий постоянные ширину и угол атаки, несет нагрузку, зависящую только от угла атаки крыла α и не зависящую от угла наклона границы $\beta_г$.

Если же подойти к этой задаче с позиций вихревой теории, то такой участок крыла должен быть заменен вихрями, параллельными набегающему потоку, суммарная интенсивность которых пропорциональна $M_1(h)$. Изменение h ведет к изменению интенсивности этих вихрей u, следовательно, появлению вихрей, перпендикулярных потоку, интенсивность которых пропорциональна $\frac{dM_1(h)}{dh} \frac{dh}{dx}$, т. е. явно связана с производной от глубины. Однако эти вихри располагаются над одними и теми же участками границы, т. е. неподвижны относительно жидкости и не создают подъемной силы. Они аналогичны свободным вихрям, расположенным непосредственно у профиля, в схеме Кюсснера [91].

§ 3. ОБЩИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПОДЪЕМНОЙ СИЛЫ И ПРОДОЛЬНОГО МОМЕНТА

Введем безразмерные величины:

$$s = \frac{x}{B_0}, \quad w = \frac{W}{V_0}, \quad l = \frac{L}{L_0}, \quad \lambda^* = \frac{L_0}{B_0}, \quad \tau = t\frac{V_0}{B_0}, \tag{4.11}$$

где L_0 — максимальный полуразмах крыла.

Используя их, получаем следующие формулы для коэффициентов нормальной силы c_n и момента c_m относительно точки с координатой $s = s_c$:

$$c_n = -\frac{\lambda}{2} \int_0^1 \left\{ (w_\tau l + 2wl_s) M_1(h) + w\left(\frac{w}{2\lambda^*} - hl_s\right) M_3(h) \right\} l ds, \tag{4.12}$$

$$c_m = \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \left\{ (w_\tau l + 2wl_s) M_1(h) + w\left(\frac{w}{2\lambda^*} - hl_s\right) M_3(h) \right\} (s - s_c) l ds. \tag{4.13}$$

В случае равномерного прямолинейного движения крыла

$$W(x) = -V_0 \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ — угол атаки в данном сечении. Очевидно, что $w_\tau = -\alpha_s$. Следовательно, для c_n и c_m получим

$$c_n = \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \left[(\alpha_s l + 2\alpha l_s) M_1(h) - \alpha\left(hl_s + \frac{\alpha}{2\lambda^*}\right) M_3(h) \right] l ds, \tag{4.14}$$

$$c_m = \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \left[(\alpha_s l + 2\alpha l_s) M_1(h) - \alpha\left(hl_s + \frac{\alpha}{2\lambda^*}\right) M_3(h) \right] (s - s_c) l ds. \tag{4.15}$$

Соотношения (4.14) и (4.15) справедливы при малых значениях удлинения λ и угла атаки α, однако отношение α/λ может быть величиной конечной. Поэтому члены, содержащие множитель α^2/λ^*, в приведенных формулах сохранены.

Выражение (4.14) для коэффициента подъемной силы можно упростить. Рассмотрим крыло, размах которого стремится к нулю при приближении к передней кромке, и вычислим силу, приходящуюся на участок $0 \leqslant s \leqslant a$. Интегрируя по частям, получаем

$$\int_0^a M_1(h)(\alpha_s l + 2\alpha l_s) l ds = M_1[h(a)] l^2(a) \alpha(a) - \int_0^a M_3(h) l^2(s) \alpha(s) \frac{dh(s)}{ds} ds. \tag{4.16}$$

Производная $\frac{dh}{ds}$ выражается через угол атаки крыла $\alpha(s)$ и угол наклона границы $\beta(s)$

$$\frac{dh}{ds} = \frac{1}{2\lambda^*} [\alpha(s) - \beta(s)].$$

Следовательно, составляющая c_{na} коэффициента подъемной силы крыла, приходящаяся на рассматриваемый участок его, запишется в виде

$$c_{na} = \frac{\lambda}{2} \left\{ M_1(h_a) l^2(a) \alpha(a) + \int_0^a M_3(h) \alpha(s) \left(h_г(s) l_s(s) + \frac{\beta(s)}{2\lambda^*} \right) l(s) ds \right\},$$

где $h_г(s) = -\frac{Z_г(x)}{2L(x)}$.

При $a = 1$ получаем коэффициент нормальной силы для всего крыла.

Таким образом, сила, действующая на крыло, включает два слагаемых: одно зависит только от условий у задней кромки и равно подъемной силе крыла у плоской поверхности, параллельной вектору скорости, второе учитывает наклон границы.

Соотношение (4.18) позволяет оценивать подъемную силу крыльев с передней кромкой конечной ширины, которые, строго говоря, не могут исследоваться при помощи теории тонкого тела. Такое крыло можно рассматривать как предел крыла, заостренного на участке $s<a$, при $a \to 0$. Тогда второе слагаемое в (4.16) стремится к нулю, а первое войдет в (4.18) в виде дополнительного члена Δc_n, которому соответствует сосредоточенная сила, приложенная к передней кромке крыла. Из (4.16) находим

$$\Delta c_n = \frac{\lambda}{2} M_1(h_н)\alpha_н l_н^2, \qquad (4.19)$$

где $\alpha_н$, $l_н$ и $h_н$ — значения α, l и h при $s = 0$.

В выражении для c_m появится слагаемое

$$\Delta c_m = \Delta c_n s_c. \qquad (4.20)$$

В случае прямоугольного крыла с постоянным углом атаки формулы сильно упрощаются. Коэффициент нормальной силы имеет вид

$$c_n = \frac{\alpha\lambda}{2}\left[M_1(h_н) - \frac{\alpha}{2\lambda^*}\int_0^1 M_3(h)\,ds\right], \qquad (4.21)$$

а коэффициент момента относительно передней кромки

$$c_m = -\frac{\alpha\lambda}{2}\frac{\alpha}{\lambda^*}\int_0^1 M_3(h)\,s\,ds. \qquad (4.22)$$

* В общем случае движения твердого крыла скорость W определяется из соотношения

$$W = -V_0\alpha(x) + \frac{dH_c}{dt} - \Omega(x - x_c),$$

где Ω — угловая скорость вращения крыла вокруг линии $x = x_c$. Очевидно, что

$$\frac{dW}{dt} = -V_0^2\frac{d\alpha}{dx} + \ddot H_c - \Omega(x - x_c).$$

В безразмерных величинах приведенные соотношения имеют вид

$$w = -\alpha + v - \omega(s - s_c), \quad w_\tau = -\alpha_s + \dot V - \omega - \dot\omega(s - s_c),$$

где $v = \frac{1}{V_0}\frac{dH_c}{dt}$, $\dot v = \frac{B_0}{V_0}\frac{dH_c}{dt^2}$, $\omega = \frac{\Omega B_0}{V_0}$, $\dot\omega = \frac{B_0^2}{V_0^2}\frac{d\Omega}{dt}$. Подставляя эти

выражения в (4.12), получаем

$$c_n = \frac{\lambda}{2}\int_0^1\Big\{\alpha_s M_1 l + \alpha\,[2M_1 l_s - M_3 h l_s] + \dot\omega M_1 l(s - s_c) +$$

$$+ \omega\,[M_1 l + 2M_1 l_s(s - s_c) - M_3 h l_s(s - s_c)] - \dot v M_1 l -$$

$$- v(2M_1 l_s - M_3 h l_s) - \frac{M_3}{2\lambda^*}[\alpha + \omega(s - s_c) - v]^2\Big\}\,l\,ds. \qquad (4.23)$$

Пусть на равномерное прямолинейное движение крыла наложены малые возмущения. Из (4.23) следует, что в этом случае справедливо разложение

$$c_n = c_{n0} + c_n^h(h_c - h_{c0}) + c_n^\vartheta(\vartheta - \vartheta_0) + c_n^\omega\omega + c_n^{\dot\omega}\dot\omega + c_n^{\ddot h}\ddot h_c + c_n^{\dot h}\dot h_c, \qquad (4.24)$$

где $h_c = \frac{H_c}{2L_0}$, ϑ, ω — фактические параметры движения крыла; $h_{c0} = \frac{H_{c0}}{2L_0}$ и ϑ — параметры, определяющие рассматриваемое равномерное движение; c_{n0} — значение c_n, отвечающее этому режиму;

$$c_n^h = \frac{\lambda}{2}\int_0^1\left[(\alpha_s l + \alpha l_s)M_3(h) - \alpha\left(hl_s + \frac{\alpha}{2\lambda^*}\right)M_4(h)\right]ds; \qquad (4.25)$$

$$c_n^\vartheta = \frac{\lambda}{2}\int_0^1\Big\{\left[2l_s M_1(h) - \left(hl_s + \frac{\alpha}{\lambda^*}\right)M_3(h)\right]l -$$

$$- \frac{1}{2}(s - s_0)\left[\left(\frac{\alpha_s}{\lambda^*}l + \frac{\alpha}{\lambda^*}l_s\right)M_3(h) - \frac{\alpha}{\lambda^*}\left(hl_s + \frac{\alpha}{2\lambda^*}\right)M_4(h)\right]\Big\}ds; \qquad (4.26)$$

$$c_n^{\dot\omega} = \frac{\lambda}{2}\int_0^1 M_1(h)\,l^2(s - s_c)\,ds; \qquad (4.27)$$

$$c_n^{\ddot h} = -\frac{\lambda}{2}\int_0^1 M_1(h)\,l^2 ds; \qquad (4.28)$$

$$c_n^\omega = \frac{\lambda}{2}\int_0^1\left\{M_1(h)\,[l + 2l_s(s - s_c)] - M_3(h)(s - s_c)\left(\frac{\alpha}{\lambda^*} + hl_s\right)\right\}l\,ds; \qquad (4.29)$$

$$c_n^{\dot h_c} = \frac{\lambda}{2}\int_0^1\left\{-2M_1(h)\,l_s + M_3(h)\left(\frac{\alpha}{\lambda^*} + hl_s\right)\right\}l\,ds, \qquad (4.30)$$

где $M_4(h) = \frac{dM_3(h)}{dh}$.

Аналогично для коэффициента момента получим

$$c_m = c_{m0} + c_{m0}^{h}(h_c - h_{c0}) + c_m^{\vartheta}(\vartheta - \vartheta_0) + c_m^{\dot\omega}\dot\omega + \\ + c_m^{\ddot h}\ddot h_c + c_m^{\dot h}\dot h_c + c_m^{\omega}\omega. \quad (4.31)$$

Выражения для производных коэффициента момента вычисляются по формулам, отличающимся от приведенных выше только множителем $s - s_c$ под интегралом.

§ 4. УРАВНЕНИЯ ПОПЕРЕЧНОГО ОБТЕКАНИЯ

При описании течения в поперечной плоскости целесообразно использовать вспомогательную систему координат $o_2\xi\eta$, а характерный размер сечения крыла (полуширина пластинки) принять равным единице (рис. 4.2).

Начало координат может быть помещено в произвольной точке. Тогда уравнения границы и крыла имеют вид

$$\eta_к = f_1(\xi_к, h), \quad (4.32)$$

$$\eta_г = f_2(\xi_к, h) = \eta_к - 2h. \quad (4.33)$$

Координата η_0 точки o_3, в которой ось o_1x пересекает плоскость $o_2\xi\eta$, определяется из уравнения (4.32) или (4.33):

$$\eta_0 = \eta_г - \frac{Z_г}{L}$$

или

$$\eta_0 = \eta_к - \frac{Z_к}{L}.$$

Естественно, что значение производной $\frac{d\eta}{dt}$ не зависит от того, какое из уравнений используется.

В первом случае получим

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{L}\frac{d}{dt}(Z - Z_г) - \frac{Z - Z_г}{L^2}\frac{dL}{dt} + \frac{d\eta_г}{dt}.$$

Во втором случае в первые два слагаемые вместо $Z_г$ войдет $Z_к = Z_г + H$, в третье вместо $\eta_г - \eta_к = \eta_г + h$; после дифференцирования дополнительные слагаемые взаимно уничтожаются.

В рассмотренном выше случае краевая задача в плоскости поперечного обтекания представляет собой задачу о приближении пластинки к плоской поверхности. Она была подробно исследована в связи с задачей о крыле с минимальным индуктивным сопротивлением в работах Ю. Л. Жилина [49] и П. И. Зинчука [54], которые содержат необходимые для расчета сведения. В частности, для $M_1(h)$ получена следующая простая формула

$$M_1(h) = \pi\frac{1 + 0{,}5\tau^2}{1 - \tau^2}, \quad (4.34)$$

где $\tau = \sqrt{4h^2 + 1} - 2h$.

Накрененные и некоторые другие типы крыльев были рассмотрены в работах [46, 54].

Необходимые данные для крыльев сложной формы могут быть получены с использованием электрогидродинамической аналогии или численно, например методом дискретных вихрей [10, 88].

Применение последнего метода рассмотрим на конкретном примере. При конечных углах атаки с боковых кромок крыла сходят свободные вихри, которые ниже по потоку располагаются на некотором расстоянии от его поверхности.

Для расчета сил, возникающих при таких режимах течения, необходимо иметь решение задачи о пластинке в присутствии заданной системы вихрей. Заменив пластинку вихревым слоем неизвестной интенсивности $\gamma(\xi)$, приходим к интегральному уравнению

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\gamma(\xi')\left[\frac{1}{\xi - \xi'} - \frac{\xi - \xi'}{(\xi - \xi')^2 + 16h^2}\right]d\xi' = \\ = -1 + \sum_i \frac{\Gamma_{вi}}{2\pi}\left[\frac{\xi_{вi} - \xi}{(\xi_{вi} - \xi)^2 + (\eta_{вi} - \eta)^2} - \frac{\xi_{вi} - \xi}{(\xi_{вi} - \xi)^2 + (\eta_{вi} + 4h + \eta^2)}\right], \quad (4.35)$$

где ξ' — координаты точек вихревого слоя; ξ, η — координаты точки пластинки, в которых должно выполняться условие непротекания (4.5); $\Gamma_{вi}$, $\xi_{вi}$, $\eta_{вi}$ — интенсивность и координаты свободных вихрей.

Решение уравнения (4.35) ищется в классе функций, неограниченных в точках $\xi = \pm 1$ [32].

Теорема о равенстве нулю суммарной интенсивности вихрей дает дополнительное уравнение

$$\int_{-1}^{1}\gamma(\xi)\,d\xi + \sum_i \Gamma_{вi} = 0, \quad (4.36)$$

обеспечивающее единственность решения задачи. Если течение симметрично, вместо (4.36) достаточно использовать условие

$$\gamma(\xi) = -\gamma(-\xi).$$

Заменив вихревой слой дискретными вихрями и потребовав, чтобы условие непротекания выполнялось в соответствующем числе расчетных точек, получим систему линейных алгебраических уравнений для определения интенсивности этих вихрей. В симметричном случае на полуразмахе берут одинаковое число вихрей и расчетных точек, которые целесообразно размещать по закону косинуса [88]

$$\xi = \cos\frac{\pi k}{4m}, \qquad 0 \leqslant k \leqslant 2(m - 1), \quad (4.37)$$

где m — число вихрей на полуразмахе. Четным значениям k отвечают вихри, нечетным — расчетные точки.

В несимметричном случае, заменив непрерывный вихревой слой N вихрями и разместив между ними $N - 1$ расчетную точку, получим

8 — 4-893

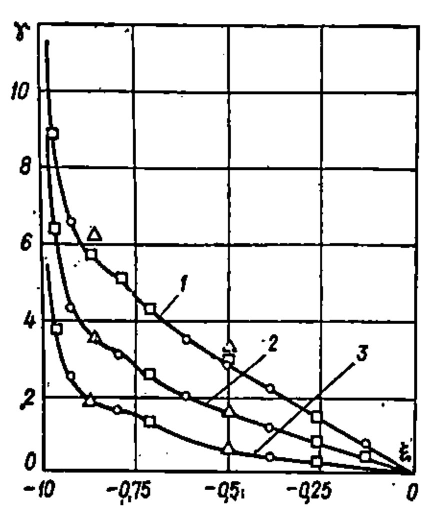


Рис. 4.3 Влияние числа вихрей на точность расчета:
1 — $h=0,05$; 2 — $h=0,10$; 3 — $h=2,00$; △ — $N=3$; □ — $N=6$; ○ — $N=12$; ———— — $N=24$.

из условия непротекания $N-1$ уравнение. Недостающее уравнение вытекает из условия (4.36).

Координаты вихрей и расчетных точек могут быть заданы либо по формуле, обобщающей (4.37):

$$\xi = \cos\frac{\pi k}{2(N-1)},$$

$$0 \leqslant k \leqslant 2(N-1), \qquad (4.38)$$

либо по формуле

$$\xi = \cos\frac{\pi k}{N}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant 2N-1, \qquad (4.39)$$

где нечетные значения k отвечают вихрям, четные — расчетным точкам.

В первом случае крайний вихрь расположен на кромке крыла, во втором — на некотором расстоянии от нее.

На рис. 4.3 показано распределение интенсивности вихрей, полученное при различном числе расчетных точек. Видно, что даже минимальное число точек ($N=3$) позволяет получить неплохие результаты.

Значения $M_1(h)$ найдем, дважды проинтегрировав полученное распределение вихревой интенсивности.

Расчет производных $\frac{dM_1}{dh}$ и $\frac{d^2M_1}{dh^2}$ можно выполнить по формулам численного дифференцирования, предварительно вычислив M_1 для трех значений h, определенных, например, в виде

$$h_1 = \frac{h_0}{1+\delta}, \quad h_2 = h_0, \quad h_3 = \frac{h_0}{1-\delta},$$

где h_0 — значение h, для которого рассчитываются производные.

Тогда

$$\left.\frac{dM_1(h)}{dh}\right|_{h=h_0} = \frac{1}{2\delta h_0}\left[M_1(h_3) - M_1(h_1)\right],$$

$$\left.\frac{d^2M_1(h)}{dh^2}\right|_{h=h_0} = \left(\frac{1}{h_0\delta}\right)^2\left[\frac{M_1(h_1)}{h_1} - 2\frac{M_1(h_2)}{h_2} + \frac{M_1(h_3)}{h_3}\right].$$

§ 5. ВЛИЯНИЕ ФОРМЫ ГРАНИЦЫ НА ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КРЫЛА

Прежде чем перейти к анализу результатов выполненных расчетов, отметим, что размеры, входящие в формулы для гидродинамических сил, можно разделить на две независимые группы: продольные и поперечные. Для каждой группы может быть выбран свой характерный

размер. Отношение этих размеров определяет удлинение λ^* и характерный угол атаки крыла α^*.

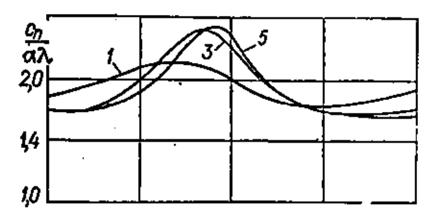
Коэффициент гидродинамической силы можно представить в виде

$$c_R(\alpha^*, \lambda^*) = \alpha^*\lambda c_R'\left(\frac{\alpha}{\lambda^*}\right),$$

где c_R' уже не зависит от соотношения между продольными и поперечными размерами.

По формулам, полученным в § 3, были выполнены расчеты гидродинамических характеристик крыльев треугольной формы в плане, движущихся около поверхности периодического профиля вида

$$Z_г = -A_в\left[1 + \cos 2\pi\frac{X}{L_в}\right]. \qquad (4.40)$$



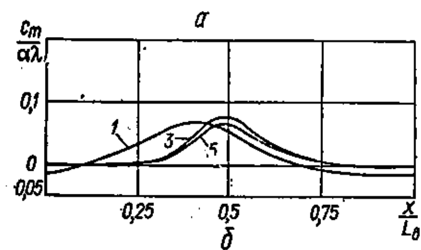


Рис. 4.4. Зависимость c_n (а) и c_m (б) от положения передней кромки крыла для волн заданной высоты (цифры у кривых — отношение длины волн к хорде крыла).

Коэффициент момента треугольных крыльев рассчитывался относительно точки, отстоящей на 2/3 хорды от передней кромки, в которой расположен центр давления крыла в безграничном потоке.

Типичные результаты расчетов приведены на рис. 4.4—4.6.

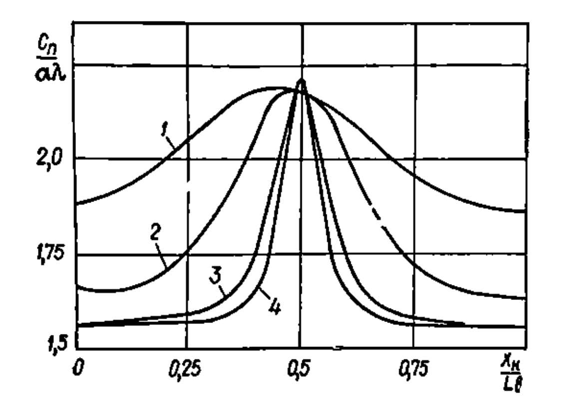
На рис. 4.4 показана зависимость c_n и c_m для треугольного крыла от положения его задней кромки относительно профиля поверхности для волн различной длины.

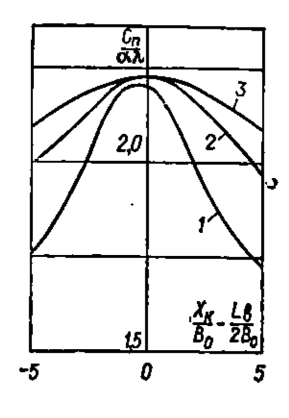
Как видно, полученные зависимости не гармоничны, что является следствием нелинейной зависимости функции M_1 от h. Зависимость, близкая к гармонической, имеет место лишь в том случае, когда отношение $A_в/H$ мало.

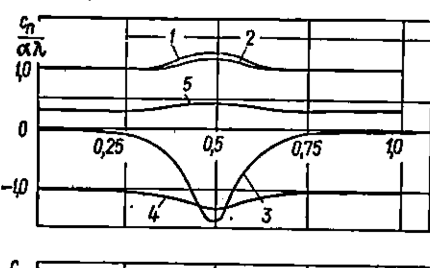
Для сравнительно крупных возмущений, амплитуда которых соизмерима с размахом, а длина превышает три хорды крыла, кривые состоят из последовательности пиков, отвечающих движению у возвышенных участков поверхности, и участков с медленным изменением c_n и c_m, отвечающих движению у впадин.

Увеличение c_n при подходе к возвышению происходит медленнее, чем его уменьшение при удалении, причем максимумы кривых отвечают положению крыла, когда задняя кромка не дошла до вершины возвышения.

Увеличение длины волны при постоянной амплитуде ведет к тому, что отношение ширины пика к длине волны падает, а к хорде крыла — растет (рис. 4.5, 4.6). Максимальные и минимальные значения c_n с изменением длины волны меняются мало: $c_{n\,\max} = 2{,}142\,\alpha\lambda$ при $L_в = 3B_0$, $c_{n\,\max} = 2{,}24\,B_0$ при $L_в = 200\,B_0$.







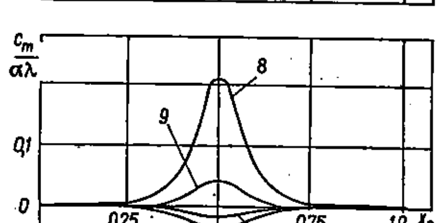


Рис. 4.5. Зависимость c_n (x) для волн разной длины. Размеры по оси ox отнесены к длине волны:
1—$\lambda_в$=5; 2—$\lambda_в$=20; 3—$\lambda_в$=100; 4—$\lambda_в$=200.

Рис. 4.6. Зависимость c_n (x) для волн разной длины. Размеры по оси ox отнесены к хорде:
1 — $\lambda_в$=20; 2— $\lambda_в$=100; 3— $\lambda_в$=200.

Рис. 4.7. Зависимость коэффициентов гидродинамических сил и их производных от взаимного положения крыла и волны:
1—$c_n/\alpha\lambda$; 2—c_n^{ϑ}/λ; 3—$c_n^h/\alpha\lambda$; 4—$c_n^{\dot h}/\lambda$; 5—c_m^{ω}/λ; 6—$c_m/\alpha\lambda$; 7—c_m^{α}/λ; 8—$c_m^h/\alpha\lambda$; 9—$c_m^{\dot h}/\lambda$; 10—c_m^{ω}/λ.

Все отмеченные особенности непосредственно вытекают из формулы (4.18). Первое ее слагаемое достигает максимума в момент, когда задняя кромка находится над вершиной возвышения; второе к этому времени уже принимает отрицательное значение.

Уменьшение длины волны ведет к сближению пиков, отвечающих соседним возвышениям. При этом максимальные значения c_n заметно падают, а минимальные возрастают.

Анализируя изменение производных от аэродинамических коэффициентов (рис. 4.7), обратим особое внимание на производные c_n^h и c_m^h, которые в безграничной жидкости равны нулю. Если амплитуда и длина волны достаточно велики, эти производные изменяются от значений, близких к нулю над впадинами, до сравнительно больших величин над возвышениями, что может существенно изменить характеристики крыла как динамической системы. Относительное изменение других производных (например, $c_n^{\dot h}$, c_m^{ω}) невелико.

§ 6. КРЫЛО У ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЫ

Случай движущейся границы отличается от описанного выше только тем, что уравнение поверхности $\Sigma_г$ явно зависит от времени

$$Z_г = F_г (X, t).$$

Производная функции $F_г$ по t должна быть величиной порядка ε_1, а по X — порядка ε_2.

Граничное условие непротекания на этой поверхности записывается в виде

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial Z}\right|_{Z=Z_г} = \frac{dZ_г}{dt}.$$

Очевидно, что потенциал скорости Φ можно представить в виде суммы:

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1,$$

где Φ_0 — течение, вызванное только движением поверхности $\Sigma_г$, так что на ней выполнено условие

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial Z} = \frac{dZ_г}{dt}.$$

Задача об определении потенциала Φ_0 может быть решена независимо от задачи о крыле, и в дальнейшем предполагается, что она решена.

Обозначим $U_0 (X, t)$ и $U_1 (X, t)$ значения нормальных производных потенциала Φ_0 на поверхностях $\Sigma_г$ и $\Sigma_к$:

$$U_0(X, t) \approx \left.\frac{\partial\Phi_0}{\partial Z}\right|_{Z=Z_г}, \tag{4.41}$$

$$U_1(X, t) \approx \left.\frac{\partial\Phi_0}{\partial Z}\right|_{Z=Z_к}. \tag{4.42}$$

Отсюда

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial Z} = 0 \text{ на } \Sigma_г,$$
$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial Z} = W(X, t) - U_1(X, t) \text{ на } \Sigma_к. \tag{4.43}$$

Следовательно, задача об определении потенциала скорости Φ_1 свелась к задаче о крыле вблизи неподвижной границы, но с другим распределением нормальных скоростей на крыле, и решение ее может быть записано в виде

$$\Phi_1(X, Y, Z, t) = -[W(X, t) - U_1(X, t)]\, L(X, t)\, \psi(\xi, \eta; h),$$

где, как и в (4.5),

$$\xi = \frac{Y}{L(X, t)}, \quad \eta = \frac{Z - Z_к(X, t)}{L(X, t)}, \quad h = \frac{Z_к(X, t) - Z_г(X, t)}{2L(X, t)}.$$

Для производной $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$, определяющей давление в потоке, получим

$$\Phi_t(X, Y, Z, t) = \Phi_{0t}(X, Y, Z, t) - [W_t(X, t) - U_{1t}(X, t)]\,\psi(\xi, \eta; h) -$$
$$- [W(X, t) - U_1(X, t)]\, L_x(X, t)\, V_0 \psi(\xi, \eta; h) -$$
$$- [W(X, t) - U_1(X, t)] \Big\{ - \frac{Y}{L(X, t)} V_0 \psi_\xi(\xi, \eta; h) +$$
$$+ \left[W(X, t) - \frac{Z - Z_к(X, t)}{L(X, t)} L_x(X, t)\, V_0 \right] \psi_\eta(\xi, \eta; h) +$$
$$+ \frac{1}{2} \left[W(X, t) - U_0(X, t) - \frac{Z_к(X, t) - Z_г(X, t)}{L(X, t)} L_x(X, t)\, V_0 \right] \psi_n(\xi, \eta; h) \Big\},$$

или в безразмерном виде

$$\varphi_\tau = \varphi_{0\tau} - (w_\tau - u_{1\tau})\, l\psi - \lambda^* (w - u_1)\, l_s \psi +$$
$$+ \lambda^* (w - u_1) \left[\xi \psi_\xi l_s + \psi_\eta \left(\frac{w}{\lambda^*} + \frac{\bar{z} - \bar{z}_к}{l} l_s \right) - \psi_n \left(\frac{w - u_0}{2\lambda^*} - h l_s \right) \right], \tag{4.44}$$

где $u_0 = \frac{U_0}{V_0}$; $u_1 = \frac{U_1}{V_0}$; $\bar{z} = \frac{Z}{L_0}$; $\bar{z}_к = \frac{z_к}{L_0}$; остальные обозначения прежние.

Выражения для коэффициентов нормальной силы и продольного момента имеют вид

$$c_n = - \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \Big\{ [(w_\tau - u_{1\tau})\, l + 2 (w - u_1)\, l_s]\, l M_1(h) -$$
$$- (w - u_1) \left[h l_s + \frac{1}{2\lambda^*} (w - u_0) \right] l M_3(h) \Big\} ds, \tag{4.45}$$

$$c_m = - \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \Big\{ [(w_{1\tau} - u_{1\tau})\, l + 2 (w - u_1)\, l_s]\, l M_1(h) -$$
$$- (w - u_1) \left[h l_s + \frac{1}{2\lambda^*} (w - u_0) \right] l M_3(h) \Big\} (s - s_l)\, ds. \tag{4.46}$$

Следует отметить, что при деформациях поверхности $\Sigma_г$, характерная длина которых соизмерима с хордой крыла, и отстояниях, соизмеримых с размахом, различие между U_0 и U_1 мало. Однако если им пренебречь, то дополнительные силы, возникающие на крыле вследствие движения границы, не будут стремиться к нулю при увеличении высоты H_c.

В качестве примера был рассмотрен случай, когда потенциал скорости Φ_0 задан в виде

$$\Phi_0(X, Z, t) = - A C_в \left[e^{-\nu Z} \sin\left(2\pi \frac{X'}{L_в} \right) + A_2 e^{-2\nu Z} \sin\left(4\pi \frac{X'}{L_в} \right) \right], \tag{4.47}$$

где $X' = X - C_в V_0 t$.

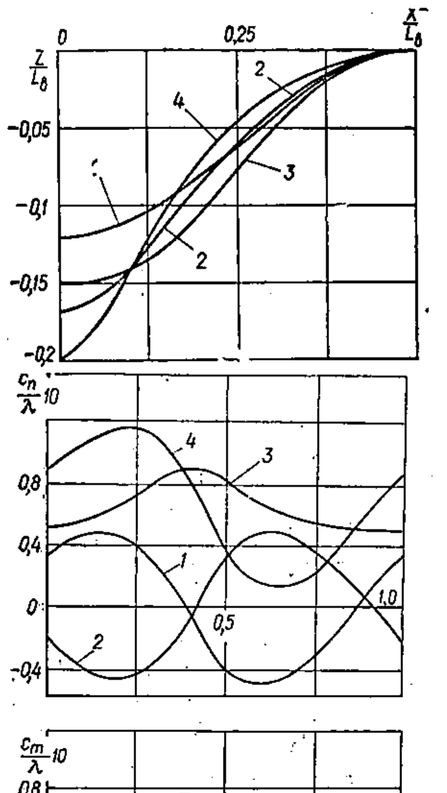


Рис. 4.8. Форма волны:

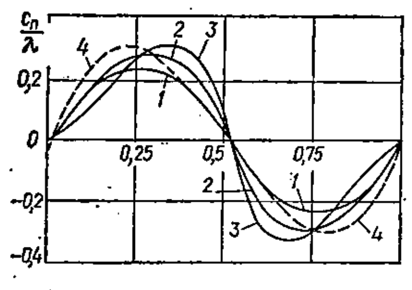
1 — приближенная формула, $A_2=0$; 2 — точная формула, $A_2=0$; 3 — точная формула, $A_2=+0,1$; 4 — точная формула, $A_2=-0,1$.

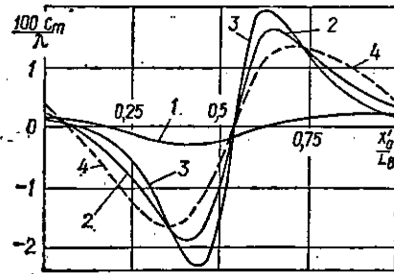
Рис. 4.9. Влияние движения границы на подъемную силу и продольный момент:

1 — $\alpha=0$, волна движется влево; 2 — $\alpha=0$, волна движется вправо; 3 — $\alpha=0,05$, волна неподвижна; 4 — $\alpha=0,05$, волна движется влево.

Рис. 4.10. Влияние удлинения крыла и формы волны на подъемную силу и продольный момент:

1 — $A_2=0$, $\lambda=0,1$; 2 — $A_2=0$, $\lambda=0,8$; 3 — $A_2=0,1$, $\lambda=0,8$; 4 — $A_2=-0,1$, $\lambda=0,8$.





Ему отвечает система волн, распространяющихся со скоростью $C_в V_0$ вдоль оси OX. Длина волны равна $L_в$, а ее профиль может быть определен из уравнения

$$Z_в(X') = A\,[e^{-\nu Z_в} \cos \nu X' - 1 + A_2 (e^{-2\nu Z_в} \cos 2\nu X' - 1)]. \tag{4.48}$$

При выполнении численных расчетов это уравнение решалось методом последовательных приближений, причем нулевое приближение определялось по формуле

$$Z_{в0} = A\,[\cos \nu X' - 1 + A_2 (\cos 2\nu X' - 1)], \tag{4.49}$$

которая получается из (4.48) при $A\nu \to 0$ (пологие волны), и в этом случае может использоваться в качестве приближенного выражения для $Z_в$.

Замена точного соотношения (4.48) приближенным вполне соответствует основным допущениям развиваемой теории. Численные расчеты показали, что она практически не влияет на окончательные результаты.

На рис. 4.8 приведена форма волны, получаемая по формуле (4.49) при $A_2 = 0$ (кривая *1*) и формуле (4.48) при $A_2 = 0$, $+0{,}1$ и $-0{,}1$ (кривые *2*, *3* и *4*).

Из сравнения кривых *1* и *2* видно, что наибольшие расхождения между точным и приближенным профилем имеют место во впадинах, где расстояние от крыла до волны сравнительно велико и ошибка в его определении слабо влияет на значения $M_1(h)$ и $M_2(h)$.

Скорости U_0 и U_1 вычисляются из (4.47) точно. Так, для U_0 получим

$$U_0 = u^* V_0 (\sin \nu X' + 2A_2 \sin 2\nu X'),$$

где $u^* = A\nu C_в V_0^{-1}$ — безразмерная амплитуда вызванной скорости.

Некоторые результаты расчетов для плоского крыла приведены на рис. 4.9 и 4.10.

На рис. 4.9 показано изменение подъемной силы и продольного момента для следующих четырех случаев: крыло с нулевым углом атаки движется слева направо, волна движется справа налево (кривая *1*, $u^* = 0{,}05$); крыло с нулевым углом атаки и волна движутся слева направо (кривая *2*, $u^* = -0{,}05$); крыло с углом атаки $\alpha = 0{,}05$ над неподвижной поверхностью (кривая *3*, $u^* = 0$); крыло с углом атаки $\alpha = 0{,}05$ движется навстречу волне (кривая 4, $u^* = 0{,}05$).

Возмущения, вызванные движением крыла и деформацией границы, численно равны ($\alpha = 0{,}05$ и $u^* = \pm 0{,}05$).

Видно, что характер кривой *3* существенно отличается от характера кривых *1* и *2*.

На рис. 4.10 приведены результаты расчетов для волны длиной $L_в = 20\ B_0$ и нулевого угла атаки. Видно, что при изменении удлинения существенно меняется кривая продольного момента. При $\lambda = 0{,}1$ (кривая *1*) крыло практически не испытывает экранирующего действия непроницаемой поверхности, и продольный момент возникает лишь вследствие неравномерного распределения скоростей по хорде крыла. При $\lambda = 0{,}8$ (кривая *2*) несущая способность участка крыла, прилегающего к задней кромке, повышается при проходе вблизи более высокого участка волны, что ведет к появлению значительного продольного момента.

Изменение величины A_2 значительно влияет на величину и положение максимумов подъемной силы и момента.

Таким образом, использование гипотезы плоских сечений позволяет оценить нестационарные составляющие гидродинамических сил, действующих на крыло вблизи неплоской поверхности, и учесть влияние течения, вызванного движением ограничивающей жидкость поверхности.

§ 7. ДВИЖЕНИЕ КРЫЛА ВДОЛЬ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЫ

В некоторых случаях удается применить теорию тонкого тела к расчету крыльев, движущихся вдоль образующих криволинейной поверхности. Примером является крыло в потоке с круговой цилиндрической границей, например в струе жидкости или рабочей части гидродинамической трубы.

Теперь в плоскости поперечного обтекания (рис. 4.11) получим задачу о пластине вблизи окружности, на которой должно выполняться условие непротекания (в случае твердой поверхности) либо условие о постоянстве касательной к окружности составляющей вызванной скорости (в случае свободной поверхности). Эта задача легко решается численно, поскольку решение плоской задачи о вихре вблизи окружности известно [75, 95].

В случае вихря, расположенного вне окружности, комплексный потенциал имеет вид

$$F(\xi) = \frac{\gamma}{2\pi i}\left\{\ln(\zeta - \zeta_в) \pm \ln\left[\zeta - \left(\frac{R_г^2}{\bar\zeta_в - \bar\zeta_0} + \zeta_0\right)\right] \mp \ln(\zeta - \zeta_0)\right],$$

где $\zeta_в$ — комплексная координата вихря; $R_г$ — радиус окружности; ζ_0 — координата ее центра. Верхний знак отвечает случаю свободной поверхности, нижний — твердой границы.

Для крыла, расположенного вдоль радиуса окружности, интегральное уравнение имеет вид

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1} \gamma(\xi')\left[\frac{1}{\xi - \xi'} + G(\xi, \xi'; r_г, h)\right] d\xi' = \alpha + \omega'\xi, \qquad (4.50)$$

где

$$G(\xi, \xi'; r_г, h) = \mp \frac{1}{2r_г + 2h + 1 + \xi' - 4r_г^2/(2r_г + 2h + 1 + \xi)} \pm$$

$$\pm \frac{1}{2r_г + 1 + \xi + 2h}, \quad r_г = \frac{R_г}{2L}, \qquad (4.51)$$

$h = \frac{H}{2L}$ — безразмерное отстояние кромки крыла от окружности (см. рис. 4.11); α — угол атаки; ω' — безразмерная угловая скорость пластинки:

$$\omega' = \frac{\Omega_x L(X)}{V_0},$$

Ω_x — угловая скорость крыла.

Отметим, что в силу условия (4.36) последнее слагаемое в (4.51) несущественно.

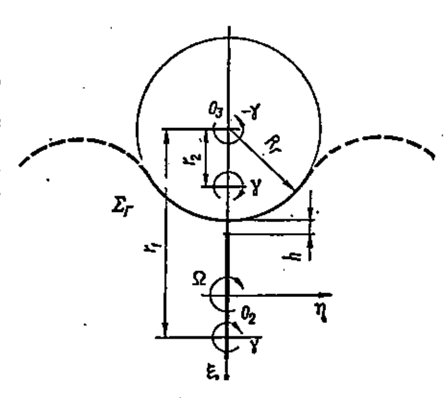


Рис. 4.11. Крыло, движущееся вдоль криволинейной границы.

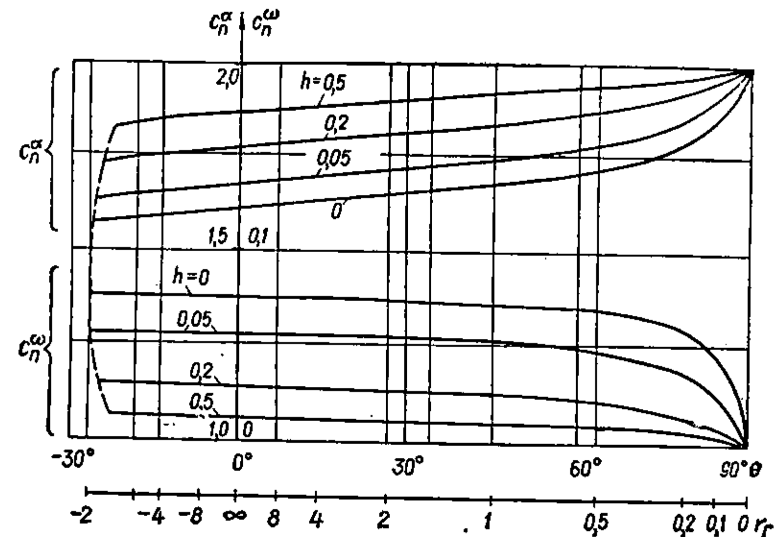


Рис. 4.12. Влияние радиуса кривизны границы на характеристики крыла $r\theta = \operatorname{arc\,tg}(1/r_г)$.

Произведя расчет, получим значения производных c_n^α, c_n^ω, m_x^α и m_x^ω в зависимости от радиуса окружности и величины зазора , а также производные от этих величин по $r_г$ и h. На рис. 4.12 они приведены для случая, когда поверхность $\Sigma_г$ является свободной границей. Положительные значения $r_г$ показывают, что жидкость занимает внешность круга $|\zeta - \zeta_0| \leqslant r_г$, отрицательные — что оно находится внутри этого круга. Случай $r_г = \infty$ соответствует плоской границе. Расчеты показывают, что влияние кривизны свободной поверхности существенно лишь при малых радиусах кривизны.

Отметим, что в расчетах пренебрегались деформации свободной поверхности, которые, следовательно, должны быть малы по сравнению с размахом крыла.

Полученные результаты с некоторым приближением могут быть использованы и в случае, когда сечение свободной поверхности не является окружностью.

§ 8. О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ПОПЕРЕЧНОГО ОБТЕКАНИЯ

Эффективность численного решения уравнений вида (4.36) или (4.50) существенно зависит от того, каким образом вихри и расчетные точки распределены по отрезку, на котором ищется решение.

Применительно к крыльям в безграничной жидкости вопросы, связанные с рациональным размещением вихрей и расчетных точек, рассматривались во многих работах, например [56, 88, 53]. В них было показано, что расчетные точки и вихри должны чередоваться, причем необходимо, чтобы вблизи конца отрезка, на котором решение ограничено, располагалась расчетная точка, а вблизи конца, на котором оно неограничено, — вихрь.

Если ищется решение, неограниченное на обоих концах, ближайшими к обоим концам должны быть вихри, число которых на 1 превосходит число расчетных точек. Однозначность решения обеспечивается дополнительным условием, например заданием суммарной циркуляции. При увеличении числа вихрей и расчетных точек их координаты должны изменяться таким образом, чтобы в пределе расчетные точки делили отрезки между соседними вихрями пополам.

Очевидно, существует бесчисленное множество распределений вихрей и расчетных точек, отвечающих этим требованиям.

Сравнительная оценка различных вариантов расчетной схемы может быть выполнена путем сравнительных расчетов, при которых систематически изменяется не только число расчетных точек, но и их размещение, применительно к конкретному уравнению. Такая серия расчетов была выполнена применительно к уравнению (4.50).

Достаточно общий способ получения распределения вихрей и расчетных точек, удовлетворяющего приведенным выше условиям, состоит в следующем. На отрезке $0 \leqslant x \leqslant 2$ разместим N равноотстоящих точек таким образом, чтобы крайние точки находились на расстоянии Δ от концов отрезка:

$$x_k = \Delta + (k-1)\frac{1-\Delta}{N-1}. \tag{4.52}$$

Точки, отвечающие нечетным значениям $k = 2i - 1$, где $1 \leqslant i \leqslant N$, соответствуют координатам вихрей, а отвечающие четным $k = 2j$, $1 \leqslant j \leqslant N-1$ — координатам расчетных точек

$$x_{вi} = \Delta + 2(i-1)\frac{2(1-\Delta)}{N-1}, \quad x_{тj} = \Delta + 2\left(j - \frac{1}{2}\right)\frac{2(1-\Delta)}{N-1}. \tag{4.53}$$

Из (4. 53) как частные случаи можно получить, например, такие зависимости:

а) при $\Delta = 0$

$$x_{вi} = \frac{2(i-1)}{N-1}, \quad x_{тj} = \frac{2j-1}{N-1}; \tag{4.54}$$

б) при $\Delta = \frac{1}{N}$

$$x_{вi} = \frac{2i-1}{N}, \quad x_{тj} = \frac{2j}{N}; \tag{4.55}$$

в) при $\Delta = \frac{1}{2N-1}$

$$x_{вi} = \frac{4i-3}{2N-1}, \quad x_{тj} = \frac{4j-1}{2N-1}. \tag{4.56}$$

Отображая указанный отрезок на отрезок $-1 \leqslant y \leqslant 1$ при помощи непрерывной монотонной функции $y = f(x)$, получаем систему точек y_k, отвечающую всем приведенным выше требованиям.

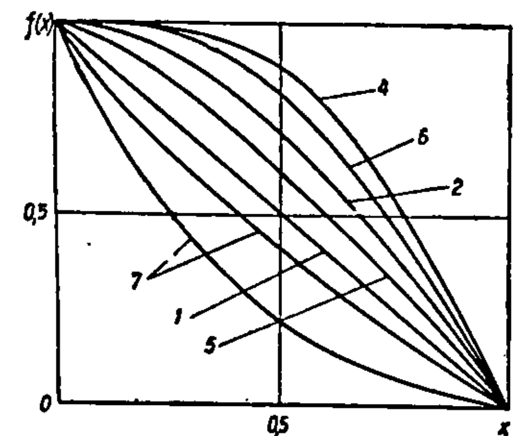


Рис. 4.13. Координаты контрольных точек. Цифры у кривых — номера вариантов. В случае 7 нижняя кривая при $C=0{,}75$, верхняя — при $C=0{,}25$. Кривая 3 лежит ниже кривой 2, почти сливаясь с ней.

Имея в виду исследовать влияние сгущения точек вблизи концов крыла на точность и сходимость результатов расчетов, рассмотрим распределения, определяемые следующими выражениями для зависимости $y = f_m(x)$ (ниже наряду с $f_m(x)$ дается ее асимптотическое представление при $x \to 0$):

1) $$f_1(x) = 1 - x,\quad f_1(\varepsilon) = 1 - \varepsilon; \quad (4.57)$$

2) $$f_2(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} x\right),\quad f_2(\varepsilon) = 1 - \frac{\pi^2}{8}\varepsilon^2; \quad (4.58)$$

3) $$f_3(x) = 1 - \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3\right),\quad f_3(\varepsilon) = 1 - \frac{3}{2}\varepsilon^2; \quad (4.59)$$

4) $$f_4(x) = \cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3\right)\right],\quad f_4(\varepsilon) = 1 - \frac{9\pi^2}{32}\varepsilon^4; \quad (4.60)$$

5) $$f_5(x) = \frac{2}{\pi}\left[(1-x)\sqrt{x(2-x)} + \operatorname{arctg}\frac{1-x}{\sqrt{x(2-x)}}\right], \quad (4.61)$$

$$f_5(\varepsilon) = 1 - \frac{8\sqrt{2}}{3\pi}\varepsilon\sqrt{\varepsilon};$$

6) $$f_6(x) = \sin\left[\frac{\pi}{2} f_5(x)\right], \quad (4.62)$$

$$f_6(\varepsilon) = 1 - \frac{16}{9}\varepsilon^3;$$

7) $$f_7(x) = (1-c)(1-x) + c(1-x)^3 = 1 - (1+c)x + cx^2(3-x). \quad (4.63)$$

Каждая из приведенных функций в сочетании с любым из выражений (4.54)—(4.56) определяет систему вихрей и расчетных точек, которая может быть использована в расчете. В дальнейшем рассматриваемые варианты обозначаются цифрой, соответствующей номеру функции (4.57)—(4.63) и буквой, отвечающей выбранному варианту формул (4.54)—(4.56).

Все приведенные выражения дают зависимости, антисимметричные относительно точки $x = 1$, отвечающей середине крыла. На рис. 4.13 даны графики некоторых из них при $0 \leqslant x \leqslant 1$.

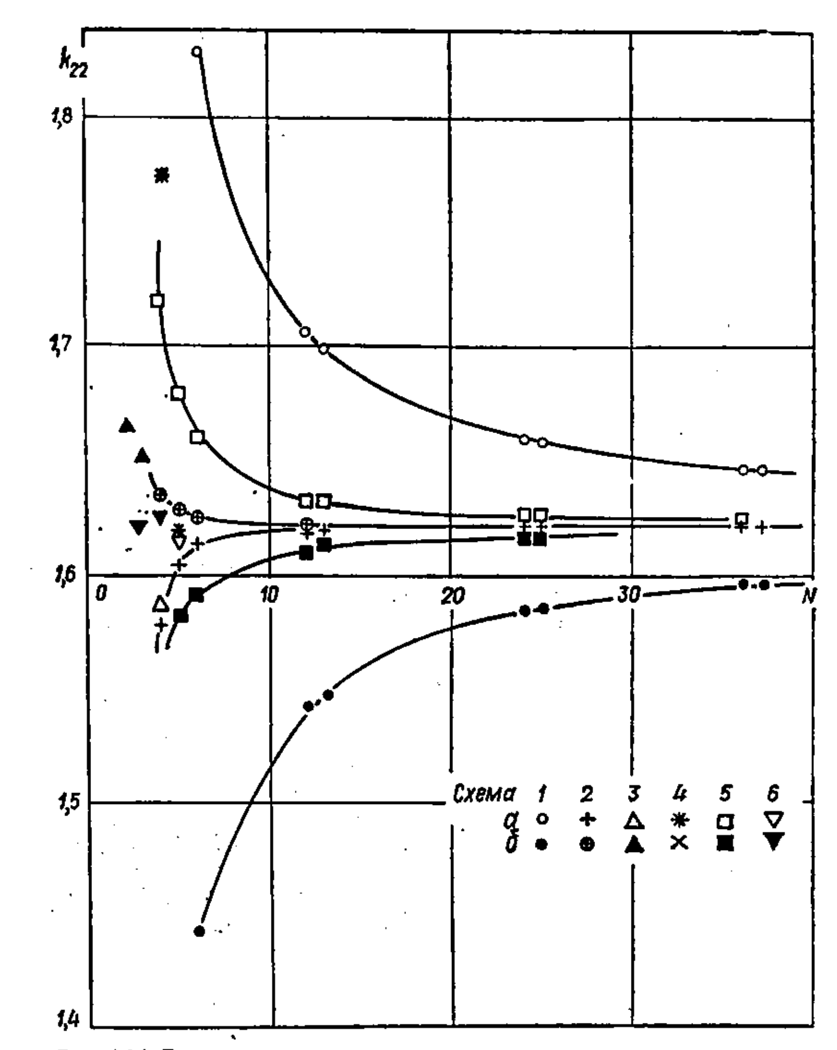


Рис. 4.14. Влияние числа точек на результаты расчетов.

Зависимость (4.58) в сочетании с (4.55) (вариант 2б) представляет собой распределение точек, рекомендованное в [88]. В случаях 2—7 точки сгущаются у концов крыла, однако степень сгущения различна: наибольшее сгущение — в случае 4, наименьшее — в случае 5.

Отметим связь координат точек, определяемых формулой (4.58), с корнями полиномов Чебышева. В варианте 2а расчетные точки совпадают с корнями полинома степени $N-1$; 2б — координаты вихрей совпадают с корнями полинома степени N; 2в — координаты как вихрей, так и расчетных точек совпадают с корнями полинома степени $2N-1$.

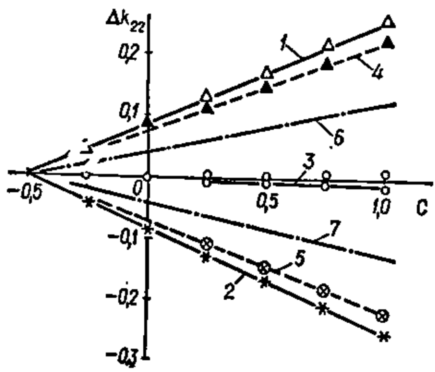


Рис. 4.15. Влияние коэффициента C в (4.63) на погрешность расчета при $h=\infty$:

1 — $\Delta=0$; 2 — $\Delta=1/N$; 3 — $\Delta=1/(2N-1)$; при $h=0{,}5$; 4 — $\Delta=0$; 5 — $\Delta=1/N$; при $h=0$; 6 — $\Delta=0$; 7 — $\Delta=1/N$.

Функция $f_7(x)$ является монотонной при $-\frac{1}{2}\leqslant c\leqslant 1$. При $c=0$ получаем равномерное распределение точек (4.57), для $c=-\frac{1}{2}$ формула (4.63) переходит в (4.59). При $c=1$ производная $f_7'(x)$ обращается в нуль в середине крыла.

Если $c>-\frac{1}{2}$, то функция $f_7(x)$ имеет конечную производную на концах крыла:

$$f_7'(0)=f_7'(2)=1+2c.$$

Типичные результаты расчетов коэффициента присоединенной массы с использованием расчетных схем 1а—6а и 1б—6б показаны на рис. 4.14. Из рисунка видна большая разница в точности, достигаемой при использовании равномерной сетки и сеток со сгущением точек к концам. Схемы 2, 3, 4 и 6 можно считать равноценными, так как они приводят к одинаковым результатам уже при $N\approx 12$; значительные расхождения получены лишь при $N<6$. Точность и согласованность результатов возрастает с удалением от границы. Для безграничной жидкости схема 2 дает точный результат (5 знаков) при $N=2$ для силы и при $N=4$ для момента. Схема 5 существенно лучше схемы 1, но несколько уступает остальным четырем.

Варианты схем «а» ($\Delta=0$) и «б» ($\Delta=1/N$) дают ошибки, примерно одинаковые по модулю, но противоположные по знаку. Применение схемы «в» ведет к увеличению ошибки. Влияние параметра c в формуле (4.62) на погрешность результата показано на рис. 4.15. Здесь применение схемы 7в позволяет существенно повысить точность расчета.

Таким образом, отклонения от оптимального распределения, определяемого формулой (4.58), в средней части пластины слабо влияет на точность результатов. Напротив, размещение точек и вихрей вблизи концов отрезка весьма существенно сказывается на результатах расчета.

§ 9. КРЫЛО ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ДВУХ ЖИДКОСТЕЙ

Движение крыла или тела другой формы вблизи свободной поверхности жидкости или поверхности раздела двух жидкостей вызывает деформацию этой поверхности, причем на величину деформаций существенно влияет весомость жидкости. Расчет формы свободной поверхности с учетом действия силы веса представляет собой достаточно сложную в вычислительном отношении задачу, решению которой посвящены многочисленные работы, начиная с работ Кельвина [111] и Хогнера [153].

Применительно к крыльям конечного удлинения и глиссирующим поверхностям эта задача рассматривалась в работах Л. А. Эпштейна [131], Г. А. Гошева [34], С. Д. Чудинова [123], Т. Нишиямы [158], А. И. Тихонова и Н. Д. Маляровой [115] и др. Однако большинство авторов ограничивались либо описанием общей схемы волновой системы, либо расчетом отдельных ее элементов.

Между тем в некоторых частных случаях можно предложить сравнительно простые расчетные методы, позволяющие получить достаточно подробную картину волнообразования.

В наиболее общем случае рассматриваемая ниже задача формулируется как задача о волнах, которые возникают на границе раздела двух жидкостей, имеющих плотности ρ_1 и ρ_2 и скорости на бесконечности V_1 и V_2, при обтекании находящегося в одной из этих жидкостей крыла.

Поскольку предполагается, что обе жидкости идеальны и вблизи границы раздела не возникает завихрений, течение описывается двумя потенциалами скорости φ_1 и φ_2, каждый из которых удовлетворяет уравнению Лапласа. На границе раздела $\Sigma_г$ должны выполняться два условия: равенства давлений и равенства нормальных к границе раздела скоростей. Они могут быть записаны в следующем виде [65]:

$$\rho_1 V_1(\varphi_{1xx}+\nu_1\varphi_{1z})=\rho_2 V_2(\varphi_{2xx}+\nu_2\varphi_{2z}),\tag{4.64}$$

$$\varphi_{1z}=\varphi_{2z}\frac{V_1}{V_2},\tag{4.65}$$

$$\nu_1=\frac{g}{V_1^2},\quad \nu_2=\frac{g}{V_2^2},$$

где индекс 1 обозначает верхнюю, 2 — нижнюю жидкость; g — ускорение силы тяжести.

Ось OX направлена по скорости течения на бесконечности, OZ — вертикально вверх. Будем считать, что $\rho_1<\rho_2$, так что поверхность раздела устойчива.

Покажем, что эта задача простой заменой параметров может быть приведена к частному случаю, когда $V_1=V_2$. Обозначим

$$\varphi_3=\varphi_2\frac{V_1}{V_2}.$$

Тогда условие (4.65) примет вид

$$\varphi_{1z}=\varphi_{3z},$$

а условие (4.64) с учетом (4.65) можно записать в виде

$$\rho^*\varphi_{1xx}-\varphi_{3xx}=\nu^*(1-\rho^*)\varphi_{3z},\tag{4.66}$$

где

$$\rho^*=\frac{\rho_1 V_1^2}{\rho_2 V_2^2},$$

$$\nu^*=\frac{\nu_2-\rho^*\nu_1}{1-\rho^*}.$$

Если скорости потоков равны, то условие (4.64) сводится к [111]:

$$\rho_1(\varphi_{1XX} + \nu\varphi_{1Z}) = \rho_2(\varphi_{2XX} + \nu\varphi_{2Z}).$$

Поскольку в этом случае $\varphi_{1Z} = \varphi_{2Z}$, получим

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}\varphi_{1XX} - \varphi_{2XX} = \nu\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\varphi_{1Z}. \qquad (4.67)$$

Уравнения (4.66) и (4.67) отличаются лишь значениями коэффициентов при производных.

На границе тела, погруженного в жидкость, должно выполняться условие непротекания

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial n} = -V_i\cos(n, X),$$

где $i = 1$, если тело находится в верхней жидкости, и $i = 2$, если в нижней.

Это граничное условие останется неизменным для тел, расположенных в верхней жидкости, либо преобразуется к виду

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = -V_1\cos(n, X)$$

для тел, расположенных в нижней. В обоих случаях оно по форме совпадает с граничным условием для случая равных скоростей.

Таким образом, рассматриваемая задача свелась к задаче с одинаковыми скоростями, но с другим отношением плотностей и иным числом Фруда. Например, для источника, расположенного на глубине h под поверхностью раздела, методом интеграла Фурье получено решение

$$\varphi_2 = \frac{1}{r} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{k(Z-h)+ik(X\cos\theta+Y\sin\theta)} \times$$

$$\times \frac{(1-\rho^*)k\cos^2\theta - a}{(1+\rho^*)k\cos^2\theta - a}\,dk\,d\theta,$$

где $a = \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\frac{g}{V_2^2} = (1-\rho^*)\nu^*.$

Отсюда видно, что решение приводится к форме, соответствующей случаю равных скоростей [96].

§ 10. ОБЩИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ВОЗМУЩЕНИЙ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Ординаты волн, возникающих на границе раздела жидкостей разных плотностей, определяются соотношением [111]

$$Z_W = -\frac{\rho_2 V_2\varphi_{2X} - \rho_1 V_1\varphi_{1X}}{g(\rho_2 - \rho_1)}.$$

При исследовании движения крыльев удобнее пользоваться выражением Z_W через потенциал ускорений

$$Z_W = -\frac{\rho_2\Theta_2 - \rho_1\Theta_1}{g(\rho_2 - \rho_1)}, \qquad (4.68)$$

или в безразмерном виде

$$z_W = \frac{Z_W}{L_0} = -\frac{1}{1-\bar\rho}\left(\frac{\bar\Theta_2}{\omega_2} - \bar\rho\,\frac{\bar\Theta_1}{\omega_1}\right), \qquad (4.69)$$

где $\bar\Theta_i = \frac{\Theta_i}{V_i^2}$, $\bar\rho = \frac{\rho_1}{\rho_2}$.

Для потенциалов ускорений при движении тонкой несущей поверхности под границей раздела жидкостей разных плотностей были получены следующие выражения [96] (здесь $V_1 = V_2 = V_0$):

$$\Theta_1 = \frac{V_0}{4\pi}\iint_{\Sigma_k}\gamma(X', Y')\left\{\frac{1+a}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_{L_1}\frac{k^2\cos^2\theta}{k\cos^2\theta - \bar\nu}e^{-k(Z-Z')+ik\sigma}dk + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_{L_2}\frac{k^2\cos^2\theta}{k\cos^2\theta - \bar\nu}e^{-k(Z-Z')-ik\sigma}dk\right]d\theta\right\}dX'dY',$$

$$\Theta_2 = \frac{V_0}{4\pi}\iint_{\Sigma_k}\gamma(X', Y')\left\{\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) - \frac{1+a}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_{L_1}\frac{k^2\cos^2\theta}{k\cos^2\theta - \bar\nu} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times e^{k(Z+Z')+ik\sigma}dk + \int_{L_2}\frac{k^2\cos^2\theta}{k\cos^2\theta - \bar\nu}e^{k(Z+Z')-ik\sigma}dk\right]d\theta\right\}dX'dY',$$

где $\sigma = -(X - X')\cos\theta + (Y - Y')\sin\theta$.

Отсюда

$$Z_W = \frac{(1+a)V_0}{4\pi g a}\iint_{\Sigma_k}\gamma(X', Y')\left\{\frac{Z'}{[(X-X')^2 + (Y-Y')^2 + (Z')^2]^{3/2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_{L_1}\frac{k^2\cos^2\theta}{k\cos^2\theta - \bar\nu}e^{-kZ'+ik\sigma}dk + \int_{L_2}\frac{k^2\cos^2\theta}{k\cos^2\theta - \bar\nu}e^{-kZ'-ik\sigma}dk\right]d\theta\right\}dX'dY'. \qquad (4.70)$$

Рассмотрим случай, когда нагрузка распределена по размаху равномерно:

$$\gamma(X, Y) = \begin{cases}\gamma(X), & |Y| < L,\\ 0, & |Y| > L.\end{cases}$$

Получим

$$\bar{z}_W = \frac{(1+a)\lambda}{4\pi\omega_в} \int_0^1 \gamma(s') \left\{ \frac{-h_в}{(s-s')^2 + h_в^2} \left[\frac{y+1}{r_1} - \frac{y-1}{r_2} \right] + \right.$$

$$+ \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_{L_1} \frac{k^2 \cos^2\theta}{k\cos^2\theta - \omega_в} e^{-kh_в + ik(s-s')\cos\theta} \left(e^{ik\lambda(y-1)\sin\theta} - \right.\right.$$

$$\left. - e^{ik\lambda(y+1)\sin\theta}\right) dk - \int_{L_2} \frac{k\cos^2\theta}{k\cos^2\theta - \omega_в} e^{-kh_в + ik(s-s')\cos\theta} \left(e^{ik\lambda(y-1)\sin\theta} - \right.$$

$$\left.\left.\left. - e^{-ik\lambda(y+1)\sin\theta}\right) dk \right] \frac{d\theta}{\sin\theta} \right\} ds'. \qquad (4.71)$$

В формулах данного и последующих параграфов размерные величины обозначаются заглавными буквами, а безразмерные следующим образом:

$$\bar{z} = \frac{Z}{B_0}, \quad s = \frac{X}{B_0}, \quad h_в = \frac{H}{B_0}, \quad \omega_в = \frac{V_0^2}{gB_0},$$

$$z_W = \frac{Z_W}{2L_0}, \quad h = \frac{H}{2L_0}, \quad x = \frac{X}{L_0}, \quad y = \frac{Y}{L_0}, \quad \omega = \frac{gL_0}{V_0^2}.$$

При вычислении входящего в выражение (4.71) интеграла по θ следует соблюдать осторожность, так как он содержит множитель $1/\sin\theta$. Запись $\bar{Z}_W$ в виде (4.71) обеспечивает отсутствие волн при $|y| \to \infty$. Если же этот интеграл разбить на два слагаемых, соответствующих волновым системам правой и левой кромок, то предельное значение каждого из них зависит от того, с какой стороны от точки $\theta = 0$ проходит контур интегрирования. Правильный результат будет получен, если направление обхода одинаково в обоих слагаемых.

При $\lambda \to \infty$ выражение для z_W переходит в формулу для ординат волн за подводным крылом в плоскопараллельном потоке. Действительно [27],

$$\lim_{a\to\infty} \int_{-1}^{+1} f(p) \frac{e^{ipa}}{p} dp = \begin{cases} \pi i f(p), & \text{если } a > 0, \\ -\pi i f(p), & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Следовательно, при $|y| < 1$

$$\bar{z}_W = \frac{1+a}{2\pi\omega_в} \int_0^1 \gamma(s') \left\{ \frac{-h_в}{(s-s') + h_в^2} + \frac{1}{2} \int_{L_1} \frac{k}{k-\omega_в} e^{-kh_в - ik(s-s')} dk + \right.$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{L_2} \frac{k}{k-\omega_в} e^{-kh_в + ik(s-s')} dk,\ ds' = \frac{1+a}{2\pi} \int_0^1 \gamma(s') \left\{ -\pi e^{-h_в\omega_в} \sin\omega_в (s - \right.$$

$$\left. - s') + \int_0^\infty e^{-kh_в} \cos k(s-s') \frac{dk}{k-\omega_в} \right\} ds'.$$

А. И. Тихоновым [114] получено выражение для комплексной скорости за вихрем

$$\frac{dW}{d\zeta} = \frac{\Gamma}{\pi i} \frac{\zeta}{\zeta^2 + H^2} + i\Gamma\nu e^{-\nu(H+i\zeta)} + \frac{\Gamma\nu}{\pi} \int_0^\infty e^{-\lambda(H+i\zeta)} \frac{d\lambda}{\lambda - \nu},$$

где $\zeta = s + iz$.

Отсюда

$$\bar{z}_W = \frac{\Gamma}{\pi} \left[\pi e^{-h_в\omega_в} \sin\omega_в s + \int_0^\infty e^{-h_в\lambda} \cos\lambda s \frac{d\lambda}{\lambda - \omega_в} \right].$$

Знаки перед первым слагаемым противоположны, так как у Тихонова выбрана другая система координат.

При $\lambda \to \infty$, $|y| > 1$ и ограниченном s формула (4.71) дает $\bar{z}_W \to 0$, т. е. плоская волновая система существует только в области между кромками крыла.

§ 11. ВОЛНОВАЯ СИСТЕМА КРЫЛА КОНЕЧНОГО РАЗМАХА

За кромками крыла, в области, где величины $1 + y$ или $1 - y$ и $x = \lambda^{-1}s$ одного порядка, волновая система крыла большого удлинения будет носить типично пространственный характер.

Для точек, в которых значения $\sqrt{x^2 + y^2}$ достаточно велики, можно воспользоваться представлением Хогнера [155]:

$$z_W - \frac{Z_W}{L_0} = \frac{(1+a)\omega_в}{2\pi} \int_0^x \left\{ \int_{-1}^y \gamma(x', y') \int_{-\pi/2}^{\theta_0} e^{-\frac{h\omega}{\cos^2\theta}} \sin\frac{\omega\sigma}{\cos^2\theta} d\theta dy' + \right.$$

$$\left. + \int_y^1 \gamma(x', y') \int_{\theta_0}^{\pi/2} e^{-\frac{h\omega}{\cos^2\theta}} \sin\frac{\omega\sigma}{\cos^2\theta} d\theta dy' \right\} dx'$$

$\left(\theta_0 = \operatorname{arctg}\left(-\frac{x}{y}\right)\right)$, которое в случае $\gamma(x, y) = \gamma(x)$ приводится к виду

$$z_W = -\frac{1+a}{2\pi} \int_0^x \gamma(x') \left[I_W(1-\eta) + I_W(1+\eta) \right] dx', \qquad (4.72)$$

где

$$I_W(y) = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{x/y} e^{-h\omega(1+k^2) + i\sqrt{1+k^2}(-x+yk)\omega} \frac{\sqrt{1+k^2}}{k} dk$$

при $\frac{x}{y} > 0$; если $\frac{x}{y} < 0$, то $I_W(y) = -I_W(|y|)$.

Для приближенного вычисления этого интеграла воспользуемся методом перевала [116]. Имеем

$$I_W(y) = \mathrm{Re} \int\limits_{-\infty}^{-1/\varepsilon} e^{-h\omega(1+k^2)-ix\omega f(k)} \frac{\sqrt{1-k^2}}{k}\, dk, \tag{4.73}$$

где
$$\varepsilon = -\frac{y}{x}; \quad f(k) = \sqrt{1-k^2}(1+k\varepsilon).$$

Найдем корни уравнения $f'(k) = 0$:

$$k_1 = \frac{-1+\sqrt{1-8\varepsilon^2}}{4\varepsilon}, \quad k_2 = \frac{-1-\sqrt{1-8\varepsilon^2}}{4\varepsilon}. \tag{4.74}$$

Деформируем контур интегрирования таким образом, чтобы он прошел через точки k_1 и k_2 вдоль линий $\mathrm{Im}\, f(k) = 0$:

$$I_W(y) = \mathrm{Re}\left\{\pi i e^{-h\omega-ix\omega} + \int\limits_L e^{-h\omega(1+k^2)-ix\omega f(k)} \frac{\sqrt{1-k^2}}{k}\, dk\right\}.$$

Контур L идет из бесконечно удаленной точки по второму квадранту, пересекает действительную ось в точке $k = -k_1$ под углом $-45°$, затем проходит через точку $k = k_2$ под углом 45° и заканчивается в точке $k = -\frac{1}{\varepsilon}$.

Согласно методу перевала заменяем $f(k)$ ее разложением в окрестности стационарных точек:

$$f(k) \approx f(k_1) + \frac{1}{2} f''(k_1)(k-k_1)^2$$

в окрестности k_1 и

$$f(k) \approx f(k_2) + \frac{1}{2} f''(k_2)(k-k_2)^2$$

в окрестности k_2, а интеграл по L заменяем суммой интегралов по касательным к L в точках перевала:

$$I_W(y) \approx \mathrm{Re}\Big\{\pi i e^{-h\omega-ix\omega} +$$
$$+\sqrt{1+k_1^2}\, e^{-h\omega(1+k_1^2)-i\omega x f(k_1)} \int\limits_{L_3} e^{-i\omega x \frac{1}{2} f''(k_1)(k-k_1)^2} \frac{dk}{k} + \tag{4.75}$$
$$+\sqrt{1+k_2^2}\, e^{-h\omega(1+k_2^2)-i\omega x f(k_2)} \int\limits_{L_4} e^{-i\omega x \frac{1}{2} f''(k_2)(k-k_2)^2} \frac{dk}{k}\Big\}.$$

Контур L_3 проходит через точку $k = k_1$ под углом $-45°$ к действительной оси, контур L_4 — под углом $+45°$ через точку $k = k_2$. Здесь учтено быстрое изменение множителя на контуре интегрирования [27].

Подстановка $k(1 \pm i) = t$ приводит выражение (4.75) к виду

$$I_W = \mathrm{Re}\Big\{\pi i e^{-h\omega-i\omega x} + \sqrt{1+k_1^2}\, e^{-h\omega(1+k_1^2)-i\omega x f(k_1)} \times$$
$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\omega x f''(k_1) t^2} \frac{dt}{t + \frac{k_1}{1-i}} + \sqrt{1+k_2^2}\, e^{-h\omega(1+k_2^2)-i\omega x f(k_2)} \times$$
$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\omega x f''(k_2) t^2} \frac{dt}{t + \frac{k_2}{1+i}}\Big\}. \tag{4.76}$$

Входящие сюда интегралы выражаются через интеграл вероятности ошибок [60]:

$$I_W = \mathrm{Re}\, \pi i \Big\{e^{-h\omega-i\omega x} - \sqrt{1+k_1^2}\, e^{-h\omega(1+k_1^2)-i\omega x f(k_1)}\, W\left(\frac{k_1\sqrt{\omega x f''(k_1)}}{1-i}\right) +$$
$$+\sqrt{1+k_2^2}\, e^{-h\omega(1+k_2^2)-i\omega x f(k_2)}\, W\left(-\frac{k_2\sqrt{-\omega x f''(k_2)}}{1+i}\right)\Big\}, \tag{4.77}$$

где $W(z) = e^{-z^2}\left(1 - \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^z e^{t^2} dt\right)$.

Соотношение

$$W[u(1+i)] = e^{-u^2 i}\left\{1 + (i-1)\left[C\left(\frac{2u}{\sqrt{\pi}}\right) + iS\left(\frac{2u}{\sqrt{\pi}}\right)\right]\right\},$$

где

$$C(x) = \int\limits_0^x \cos\frac{\pi t^2}{2}\, dt,$$

$$S(x) = \int\limits_0^x \sin\frac{\pi t^2}{2}\, dt,$$

позволяет получить выражение для I_W через интегралы Френеля [60].

Формулы (4.74) и (4.76) показывают, что $I_W(y) \to 0$ при $x \to \infty$, так как в этом случае $k_1 \to 0$.

Из (4.76) следует, что при $\varepsilon > \frac{1}{\sqrt{8}}$

$$I_W \approx \pi e^{-h\omega} \sin \omega x.$$

Рассмотрим случай, когда вся нагрузка сосредоточена на линии $x \to \infty$. Тогда

$$z_W = -\frac{1+a}{2\pi} \Gamma [I_W(1-y) + I_W(1+y)], \tag{4.78}$$

где Γ — суммарная циркуляция вокруг крыла, не изменяющаяся вдоль размаха.

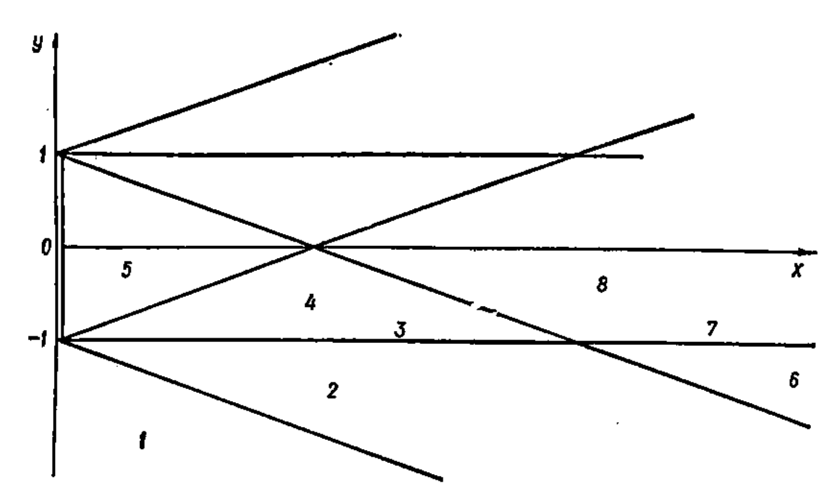


Рис. 4.16. Волновая система крыла конечного размаха.

Формулы (4.74), (4.76) и (4.78) показывают, что поверхность раздела можно разбить на несколько зон (рис. 4.16).

Зона 1

$$\frac{1-y}{x} > \frac{1}{\sqrt{8}}, \quad \frac{1-y}{x} < -\frac{1}{\sqrt{8}},$$

$$I_W(1-y) = \pi e^{-h\omega}\sin\omega x,$$

$$I_W(1+y) = -\pi e^{-h\omega}\sin\omega x,$$

$$z_W \approx 0.$$

Зона 2

$$\frac{1-y}{x} > \frac{1}{\sqrt{8}}, \quad -\frac{1}{\sqrt{8}} < \frac{1+y}{x} < 0,$$

$$I_W(1-y) = \pi e^{-h\omega}\sin\omega x, \tag{4.79}$$

$$I_W(1+y) = -\pi e^{-h\omega}\sin\omega x + \varphi(k_{1a}) - \varphi(k_{2a}),$$

$$z_W = \frac{1+a}{2\pi}\Gamma[\varphi(k_{1a}) - \varphi(k_{2a})].$$

Здесь и далее k_{1a} и k_{2a} обозначают корни уравнения (4.70) при $y' = 1+y$; $k_{1в}$ и $k_{2в}$ — корни (4.74) при $y' = 1-y$.

Слагаемые $\varphi(k_1)$ и $\varphi(k_2)$ описывают волновую систему, сходную с системой поперечных и расходящихся волн за импульсом давлений [111], однако здесь волны актисимметричны относительно линии $y = -1$. Обе системы волн затухают при $x \to \infty$.

Зона 3

$$y = -1, \quad \frac{1-y}{x} > \frac{1}{\sqrt{8}}, \tag{4.80}$$

$$z_W = -\frac{1+a}{2}e^{-h\omega}\sin\omega x.$$

Зона 4

$$\frac{1-y}{x} > \frac{1}{\sqrt{8}}, \quad 0 < \frac{1+y}{x} < \frac{1}{\sqrt{8}}, \tag{4.81}$$

$$z_W = \frac{1+a}{2}[2e^{-h\omega}\sin\omega x - \varphi(k_{1a}) + \varphi(k_{2a})].$$

Зона 5

$$\frac{1-y}{x} > \frac{1}{\sqrt{8}}, \quad \frac{1+y}{x} > \frac{1}{\sqrt{8}},$$

$$I_W(1-y) = I_W(1+y) = \pi e^{-h\omega}\sin\omega x, \tag{4.82}$$

$$z_W = -(1-a)e^{-h\omega}\sin\omega x.$$

В этой области, ограниченной линиями $y = 1 - \frac{x}{\sqrt{8}}$ и $y = -1 + \frac{x}{\sqrt{8}}$, волновое движение имеет характер волнового движения за крылом бесконечного размаха в плоскопараллельном потоке. Амплитуды волн вдвое больше, чем на линии $y = -1$.

Зона 6

$$0 < \frac{1-y}{x} < \frac{1}{\sqrt{8}}, \quad 0 > \frac{1+y}{x} > -\frac{1}{\sqrt{8}},$$

$$I_W(1-y) = \pi e^{-h\omega}\sin\omega x - \varphi(k_{1в}) + \varphi(k_{2в}), \tag{4.83}$$

$$I_W(1+y) = -\pi e^{-h\omega}\sin\omega x + \varphi(k_{1a}) - \varphi(k_{2a}),$$

$$z_W = \frac{1+a}{2}\Gamma[-\varphi(k_{1в}) + \varphi(k_{2в}) + \varphi(k_{1a}) - \varphi(k_{2a})].$$

Зона 7

$$0 < \frac{1-y}{x} < \frac{1}{\sqrt{8}}, \quad y = -1, \tag{4.84}$$

$$z_W = \frac{1+a}{2}\Gamma[\pi e^{-h\omega}\sin\omega x - \varphi(k_{1в}) + \varphi(k_{2в})].$$

При $x \to \infty$ корень k_{1a} стремится к 0, соответственно аргумент функции $W\left[\frac{k_1\sqrt{\omega x f''(k_1)}}{1-i}\right]$ стремится к 0, а сама функция стремится к 1. Следовательно, $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(k_1) = \pi e^{-h\omega}\sin\omega x$, $z_W \to 0$.

Зона 8

$$0 < \frac{1-y}{x} < \frac{1}{\sqrt{8}}, \quad 0 < \frac{1+y}{x} < \frac{1}{\sqrt{8}},$$

$$z_W = \frac{1+a}{2\pi}\Gamma[2\pi e^{-h\omega}\sin\omega x - \varphi(k_{1a}) + \varphi(k_{2a}) - \varphi(k_{1в}) + \varphi(k_{2в})].$$

При $x \to \infty$ k_{1a} и $k_{1в}$ стремятся к 0, а $\varphi(k) + \varphi(k)$ — к $2\pi e^{-h\omega}\sin\omega x$, следовательно, $z_W \to 0$ при $x \to \infty$.

Проведенный анализ показывает, что волновая система крыла ограничена линиями, проходящими через его концы под углом $\theta = 19°28'$ к направлению набегающего потока. Непосредственно за крылом образуется треугольная зона, в пределах которой гребни волн параллельны крылу, а их амплитуды не изменяются. Справа и слева к этой зоне примыкают переходные области, смыкающиеся в точке $x = L\sqrt{8}$, где L — полуразмах крыла. Далее волновая система представляет собой результат наложения двух кельвиновских систем волн.

§ 12. РАСЧЕТ ВОЛН В ОКРЕСТНОСТИ КРЫЛА МАЛОГО УДЛИНЕНИЯ

Рассмотрим более подробно случай прямоугольного крыла весьма малого удлинения, ограничившись случаем $a = 1$ (плотность верхней жидкости равна 0).

Перепишем выражение (4.70) в виде

$$\bar{z}_W = \frac{1}{4\pi\omega}\int_0^{2/\lambda^*}\int_{-1}^{1}\gamma(\bar{x}',\bar{y}')\,G(\bar{x}-\bar{x}',\bar{y}-\bar{y}',h,\omega)\,d\bar{y}'d\bar{x}', \qquad (4.85)$$

где

$$G(x,y,h,\omega) = \frac{2h}{[x^2+y^2+4h^2]^{3/2}} + \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{L_1}\frac{k^2\cos^2\theta}{k\cos^2\theta-\omega}e^{-2kh-ik\sigma}dkd\theta + \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{L_2}\frac{k^2\cos^2\theta}{k\cos^2\theta-\omega}e^{-2kh+ik\sigma}dkd\theta\right\}, \qquad (4.86)$$

где $\sigma = x\cos\theta + y\sin\theta$.

В окрестности крыла малого удлинения переменные y и y' имеют порядок 1, а переменные x и x' — порядок λ^{-1}. Следовательно, первое слагаемое в (4.86) в этой области будет величиной порядка λ^3. Входящие в (4.86) двойные интегралы аналогичны интегралам, исследованным в работах [64, 153, 164]. При $x < 0$ они убывают по крайней мере как x^{-2} и, следовательно, являются величинами порядка λ^2.

При $x > 0$ можно в первом интеграле выражения (4.86) контур L_1 заменить контуром L_2, а во втором — L_2 заменить L_1, соответственно приняв во внимание вычеты в особой точке $k = \frac{\omega}{\cos^2\theta}$.

Тогда выражение для G запишется в виде

$$G = -\frac{2h}{[x^2+y^2+4h^2]^{3/2}} + \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{L}\frac{k^2\cos^2\theta}{k\cos^2\theta-\omega}e^{-2kh-ik\sigma}dkd\theta + \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{L_1}\frac{k^2\cos^2\theta}{k\cos^2\theta-\omega}e^{-2kh+ik\sigma}dkd\theta\right\} + 2\omega\int_{-\pi/2}^{\pi/2}e^{-\frac{2h\omega}{\cos^2\theta}}\sin\frac{\omega\sigma}{\cos^2\theta}\,d\theta. \qquad (4.87)$$

Здесь двойные интегралы стремятся к нулю при больших положительных значениях x так же быстро, как интегралы в формуле (4.86) при отрицательных x, а последний член описывает основную часть возмущений свободной поверхности. Следовательно, с точностью до членов порядка λ^2 можно принять такое выражение для G:

$$G(x,y,h,\omega) = \begin{cases} 2\omega\int_{-\pi/2}^{\pi/2}e^{-\frac{2h\omega}{\cos^2\theta}}\sin\frac{\omega}{\cos^2\theta}(x\cos\theta+y\sin\theta)\,d\theta & \text{при } x>0,\\ 0 & \text{при } x<0. \end{cases} \qquad (4.88)$$

Пусть циркуляция распределена по размаху крыла равномерно:

$$\gamma(x',y') = \begin{cases}\gamma_1(x') & \text{при } |y'|<0,\\ 0 & \text{при } |y'|>0.\end{cases}$$

Тогда, выполнив интегрирование по y', получим из (4.85) и (4.88) следующее выражение для z_W:

$$z_W = \frac{1}{\pi}\int_0^{x_0}\gamma_1(x')\,[I_0(x-x',1-y) - I_0(x-x',1+y)]\,dx', \qquad (4.89)$$

где

$$I_0(x,y) = \int_0^{\pi/2}e^{-\frac{2h\omega}{\cos^2\theta}}\sin(\omega x\cos\theta)\sin\left(\omega y\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\right)\frac{d\theta}{\sin\theta\cos^2\theta}, \qquad (4.90)$$

$$x_0 = \begin{cases} x, & x \leqslant \frac{2}{\lambda},\\ \frac{2}{\lambda}, & x > \frac{2}{\lambda}.\end{cases}$$

В частном случае $\gamma_1(x') = \Gamma\delta(x')$ из формулы (4.89) получаем асимптотическое выражение для взволнованной поверхности за несущей линией, изученное в [34].

Выражение (4.90) удобно записать в виде

$$I_0(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\omega}}\int_{\sqrt{\omega}}^{\infty}e^{-2k^2h}\sin(kx\sqrt{\omega})\sin(ky\sqrt{k^2-\omega})\frac{k^2dk}{k^2-\omega}. \qquad (4.91)$$

Ограничиваясь случаем малых значений ω, что соответствует высокой

скорости движения, введем упрощение, использованное в работе [34], а именно: примем в (4.90) $\omega = 0$ везде, где оно не умножается на большой множитель x. Тогда

$$I_0(x, y) \approx \frac{1}{\sqrt{\omega}} \left[\int_0^\infty e^{-2k^2 h} \sin(k^2 y) \sin(kt)\, dk + O(\omega) \right], \qquad (4.92)$$

где $t = x\sqrt{\omega}$.

Действительно, интеграл в (4.91) имеет ограниченную производную по ω при $\omega = 0$ и $t = \text{const}$.

Интеграл (4.91) приводится к выражению [60]

$$I_0(x, y) = -\frac{1}{\sqrt{\omega}} \operatorname{Im} \frac{2}{\sqrt{2h + iy}} F_0\left(\frac{t}{2\sqrt{2h + iy}}\right),$$

где $F_0(z) = e^{-z^2} \int_0^z e^{x^2} dx$, $F_0(x)$ является решением уравнения

$$F_0(z) + 2zF(z) = 1, \qquad (4.93)$$

удовлетворяющим начальному условию $F_0(0) = 1$.

Это обстоятельство позволяет упростить вычисление $z_{\mathbb{V}}$ для некоторых конкретных законов изменения $\gamma(x')$, в частности для степенного:

$$\gamma(x) = A_m x^m. \qquad (4.94)$$

Действительно, при $x \leqslant \frac{2}{\lambda}$ выражение (4.89) представляет собой свертку функций $\gamma(x)$ и $I_0(x)$. Между тем известно, что вычисление свертки со степенной функцией приводится к повторному интегрированию. Обозначим

$$I_1(x, y) = \int_0^x I_0(x', y)\, dx',$$

$$I_m(x, y) = \int_0^x I_{m-1}(x', y)\, dx';$$

тогда

$$\int_0^x (x')^m I_0(x - x')\, dx' = m!\, I_{m-1}(x').$$

Следовательно, вычисление ординат свободной поверхности в случае, когда интенсивность вихревой поверхности задана уравнением (4.94), производится по формуле

$$z_{\mathbb{V}}(x, y) = \frac{A_m m!}{\pi} \left[I_{m+1}(x, 1 - y) + I_{m+1}(x, 1 + y) \right]. \qquad (4.95)$$

В то же время почленное интегрирование (4.93) приводит к уравнению

$$F_n''(z) + 2zF_n'(z) - 2(n-1)F_n(z) = \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}, \qquad (4.96)$$

через решение которого $F_n(z) = u_n(z) + iv_n(z)$ выражаются интегралы I_n:

$$I_0(x, y) = -\frac{2}{s\sqrt{\omega}} \left[v_0(z)\cos\theta - u_0(z)\sin\theta \right],$$

$$I_1(x, y) = -\frac{4}{\omega} v_1(z), \qquad (4.97)$$

$$I_n(x, y) = -\left(\frac{2}{\sqrt{\omega}}\right)^{n-1} s^{\frac{n-1}{2}} \left[u_n(z)\sin(n-1)\theta + v_n(z)\cos(n-1)\theta \right],$$

где

$$s = |\sqrt{2h + iy}| = \sqrt[4]{4h^2 + y^2},$$

$$\theta = \arg(\sqrt{2h + iy}) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{y}{2h}. \qquad (4.98)$$

Из выражения (4.92) видно, что интересующее нас решение отвечает начальным условиям

$$F_n(0) = F_n'(0) = 0.$$

Хотя z в уравнении (4.96) является комплексной величиной, аргумент его остается постоянным при постоянных y и h, поэтому из (4.96) легко получаем систему уравнений для вещественной u_n и мнимой v_n частей функции $F_n(z)$:

$$u_n'' + \frac{t}{2s^2}(u_n'\cos 2\theta + v_n'\sin 2\theta) - \frac{n-1}{2s^2}(u_n\cos 2\theta + v_n\sin 2\theta) =$$

$$= \frac{t^{n-1}}{(n-1)!\,(2s)^{n-1}} \sin(n+1)\theta,$$

$$v_n'' + \frac{t}{2s^2}(v_n'\cos 2\theta - u_n'\sin 2\theta) - \frac{n-1}{2s^2}(v_n\cos 2\theta - u_n\sin 2\theta) =$$

$$= \frac{t^{n-1}}{(n-1)!\,(2s)^{n-1}} \sin(n+1)\theta.$$

Интегрирование этой системы уравнений легко осуществляется с использованием стандартных процедур. Поскольку такие процедуры позволяют определить как интегрируемые функции, так и их производные, фактически можно одновременно получить решение уравнения для трех последовательных значений m:

$$F_n\left(\frac{t}{2se^{i\theta}}\right) = u_n(t) + iv_n(t),$$

$$F_{n-1}\left(\frac{t}{2se^{i\theta}}\right) = 2s\left[u_n'\cos\theta - v_n'\sin\theta + i(u_n'\sin\theta + v_n'\cos\theta)\right],$$

$$F_{n-2}\left(\frac{t}{2se^{i\theta}}\right) = (2s)^2\left[u_n''\cos 2\theta - v_n''\sin 2\theta + i(u_n''\sin 2\theta + v_n''\cos 2\theta)\right],$$

где штрихи обозначают производные по t.

Для расчета взволнованной поверхности в точках, абсциссы которых не превосходят абсциссы задней кромки крыла, достаточно определить две пары функций u_m и v_n, отвечающих правой и левой кромкам крыла, независимо от показателя m.

Для расчета волн за задней кромкой приходится определять еще $2(m-1)$ пару функций, приняв за начало отсчета точку $t=t_0=\frac{2\sqrt{\omega}}{\lambda}$. Поскольку интеграл в (4.91) явно от параметра ω не зависит, результаты расчетов можно представить таким образом, что и они не будут явно зависеть от ω.

Поскольку коэффициент A_m в (4.94) однозначно связан с величиной коэффициента подъемной силы крыла, выражение (4.95) можно записать в виде

$$z_W=\frac{c_y}{\omega}\left\{\frac{1}{\pi}\,\frac{m+1}{2t_0^m}\int\limits_0^t t^m\,[\sqrt{\omega}I_0(t,1-y)+\sqrt{\omega}I_0(t,1+y)]\,dt\right\},$$

где $t_0=\frac{2\sqrt{\omega}}{\lambda}$ — значение переменной t, отвечающее задней кромке крыла; $c_y=\frac{R_y}{\rho V_0^2/2S}$; S — площадь проекции.

Выражение в фигурных скобках зависит от ω только через t и t_0.

При $n=3$ можно рассчитать свободную поверхность для случаев $m=0$, $m=1$ и $m=2$, т. е. когда нагрузка постоянная, изменяется по линейному и квадратичному законам. Окончательные расчетные формулы имеют вид:

а)
$$m=0,\quad \gamma(t)=\frac{c_y}{2},$$
$$z_W=\frac{2c_y}{\pi\omega}[\eta_1(t)-\eta_2(t)],$$

где

$$\eta_1(t)=-\{[(2s_1)^2u_3''(t,1-y)\sin 2\theta_1+v_3''(t,1-y)\cos 2\theta_1]+$$
$$+(2s_2)^2[u_3''(t,1+y)\sin 2\theta_2+v_3''[t,1+y)\cos 2\theta_2]\},$$
$$\eta_2(t)=-\{(2s_1)^2[u_3''(t-t_0,1-y)\sin 2\theta_1+v_3''(t-t_0,1-y)\cos 2\theta_1]+$$
$$+(2s_2)^2[u_3''(t-t_0,1+y)\sin 2\theta_2+v_3''(t-t_0,1+y)\cos 2\theta_2]\};$$

б)
$$m=1,\quad \gamma=c_y\frac{t}{t_0},$$
$$z_W=\frac{4c_y}{\pi\omega}(\eta_3-\eta_4-2\eta_2),$$

где η_3 и η_4 вычисляются по формулам, аналогичным предыдущей, но с заменой u_3'' на u_3' и v_3'' на v_3';

в)
$$m=2,\quad \gamma=\frac{3}{2}c_y\left(\frac{t}{t_0}\right)^2,$$
$$z_W=\frac{12c_y}{\pi\omega}(\eta_5-\eta_6-3\eta_4-3\eta_2).$$

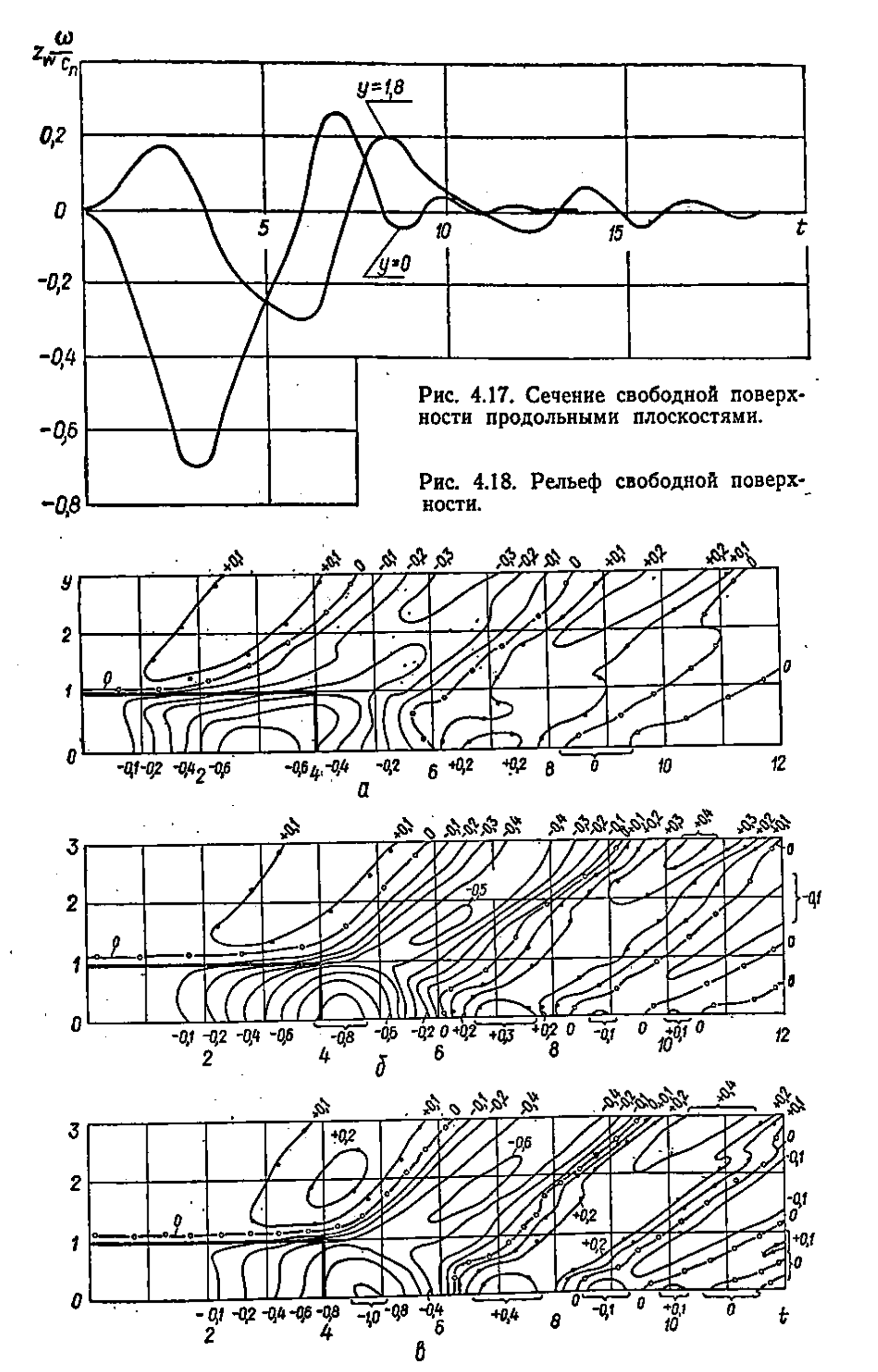


Рис. 4.17. Сечение свободной поверхности продольными плоскостями.

Рис. 4.18. Рельеф свободной поверхности.

В выражения η_5 и η_6 вместо производных входят сами функции u_3 и v_3. Естественным результатом расчета по приведенной методике является зависимость $z_{\Psi}(x)$ при $y = \text{const}$ (рис. 4.17). По этим данным могут быть построены также сечения свободной поверхности плоскостями $x = \text{const}$, по своему характеру аналогичные приведенным в [34] для крыла конечного размаха. Общий характер свободной поверхности для трех упомянутых выше случаев (*а*, *б*, *в*) показан на рис. 4.18. Здесь построены диаграммы рельефа взволнованной поверхности, т. е. линии $z_{\Psi} = \text{const}$ на плоскости (t, y).

Видно, что над крылом, ближе к его задней кромке, расположена впадина, за ней — возвышение. Далее свободная поверхность возмущена слабо (см. рис. 4.17).

За боковыми кромками крыла волновая система начинается с пологого возвышения, за которым следуют идущие под углом к направлению движения впадина и гребень.

С увеличением показателя степени в формуле (4.94) центральная впадина смещается назад, возмущения свободной поверхности растут.

Расчеты по приведенным формулам возможны для всех глубин вплоть до $h = 0$. Исключение составляет окрестность линий $y = \pm 1$ при $h = 0$, так как в этом случае знаменатель формулы (4.98) обращается в нуль.

Однако использовать результаты, полученные при малых h, следует с осторожностью, поскольку положенные в основу методики расчета допущения нарушаются при приближении крыла к свободной поверхности.

ГЛАВА 5

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ВОЗМУЩЕННЫХ КАВИТАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ

Существует довольно широкий класс осесимметричных и близких к ним течений, которые достаточно полно можно исследовать теоретически, применяя методы гидродинамических особенностей и интегральных уравнений, методы теории малых возмущений и основы гидродинамики тонких тел. Такими являются, например, развитые кавитационные течения идеальной невесомой и весомой жидкостей, возникающие за кавернообразующими телами, сечения срыва у которых круговые или близкие к круговым. При рассмотрении этих задач можно получить достаточно надежные теоретические результаты, позволяющие более полно выявить закономерности поведения свободных границ течений.

В реальных течениях поверхность развитой каверны деформируется из-за действия таких факторов, как весомость жидкости, наличие подъемной силы на кавитаторе, отличие формы кавитатора от круговой, наличие границ раздела, влияние капиллярных сил, особые случаи обтекания кавитатора и др.

Исследованию поведения кавитационных течений в поле силы тяжести, а также при наличии других возмущающих это течение факторов посвящен целый ряд монографий [18, 41, 47, 55, 62, 80, 106, 109, 134] и обзоров [31, 42, 43, 112]. Следует отметить также работы, выполненные за рубежом, например [78, 142, 144, 147, 149, 154, 159, 162, 163, 168, 169], где исследовались некоторые вопросы возмущенных кавитационных течений. С этой точки зрения представляют также интерес работы [57, 58, 63, 70, 93, 108, 122, 129, 140, 141]. Имеется целый ряд работ об отдельных аспектах данного вопроса ленинградской [2, 3, 13, 14, 44], казанской [67, 68, 71—73, 113] и новосибирской [38, 39, 74, 89] школ. Необходимо отметить ряд чисто экспериментальных работ [76, 77, 132—134, 136].

Особо надо выделить исследования Г. В. Логвиновича об общей деформации осесимметричной каверны из-за весомости жидкости и о сжатии миделевого сечения каверны под действием подъемной силы на кавитаторе [79—81, 83], которые послужили основой для развития целого направления в изучении возмущенных кавитационных течений. Дальнейшее развитие эти исследования получили в работах его учеников [17, 18, 50—52], в основе которых лежит метод малых возмущений, где в качестве невозмущенного течения рассматривается осесимметричное кавитационное течение.

На основе линейной теории Ю. Ф. Журавлевым была получена линейная система дифференциальных уравнений, с помощью которой им было исследовано искривление оси каверны силами весомости, а также гидродинамической силой на кавитаторе, впервые замечено и изучено явление переориентации поперечных сечений каверны, образованной овалообразными кавитаторами и др. [50—52].

С помощью теории малых возмущений В. Н. Буйвол и Ю. Р. Шевчук получили систему нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих движение возмущенных границ тонких пространственных каверн в поперечном поле силы тяжести [17, 18, 21, 23]. В дальнейшем эта теория была распространена на кавитационные течения в весомой жидкости при наличии различных возмущающих факторов, а именно: сил поверхностного натяжения [7, 18, 25, 126], гидродинамических сил, возникающих из-за несимметричного расположения кавитатора к скорости потока [18, 26, 124, 127, 128], границ раздела [18, 22], отклонения формы кавитатора от круговой [6, 7, 9, 18, 19, 125, 127], особых случаев обтекания кавитатора или каверны.

В настоящей главе на основе нелинейной системы дифференциальных уравнений рассматриваются возмущенные кавитационные течения за эллиптическими кавитаторами, а также при наличии местных возмущений давления, определяется форма каверны за кольцевым выступом.

§ 1. ЗАДАЧА О ВОЗМУЩЕННОМ ДВИЖЕНИИ ТОНКИХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КАВЕРН

Постановка задачи. Рассмотрим кавитационное течение, близкое к осесимметричному, подверженное действию различных возмущающих факторов, таких, как наличие поля сил тяжести, отличие формы кавитатора от круговой, наличие местных возмущений давления и др. Предполагается, что эти факторы лишь слегка изменяют общие закономерности известного осесимметричного течения, т. е. возмущения считаются малыми.

Введем абсолютную цилиндрическую систему координат r, x, θ, связанную с покоящейся жидкостью, в которой со скоростью V_0^* вдоль отрицательной оси x движется произвольно ориентированный относительно скорости V_0^* кавитатор (рис. 5.1). Течение идеальной несжимаемой жидкости около кавитатора и образованной им тонкой каверны принимается потенциальным и потенциал, следовательно, удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2\Phi \equiv \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}. \qquad (5.1)$$

Начало отсчета времени $t = 0$ будем вести с момента прохождения кавитатором (точнее, сечением срыва струй) плоскости наблюдения $x = 0$. Уравнение поверхности кавитатора считается известным

$$T(r, \theta, t) = r - R_{н}(t, \theta) = 0. \qquad (5.2)$$

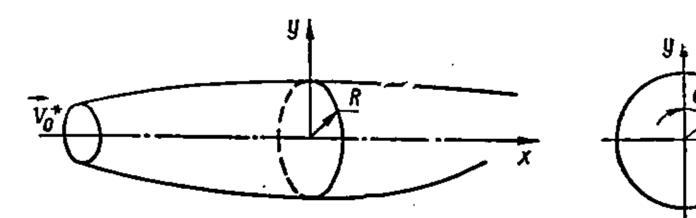


Рис. 5.1. Профиль каверны и ее поперечное сечение.

При $t > 0$ в плоскость наблюдения $x = \text{const}$ будут входить другие сечения каверны

$$r = R(t, x, \theta),$$

уравнения которых не известны. Необходимо определить уравнение контуров этих сечений и, следовательно, уравнение поверхности всей каверны

$$F(t, x, r, \theta) = r - R(t, x, \theta) = 0. \qquad (5.3)$$

Потенциал Φ течения с возмущениями должен удовлетворять условиям непроницаемости на поверхности кавитатора и каверны (кинематическое условие)

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla\Phi\nabla T\right)_T = 0; \qquad (5.4)$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \nabla\Phi\nabla F\right)_F = 0, \qquad (5.5)$$

где $\nabla\Phi = \vec{V}$ — вектор скорости течения жидкости. На жидких границах, так же, как и в каверне, должно выполняться условие постоянства давления $P = P_к$. На жидком контуре, как и в любой точке жидкости, справедлив интеграл Лагранжа—Коши, который совместно с условием постоянства давления на границе каверны можно записать в следующем виде (динамическое условие):

$$\left[\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + P_к - U - P_0\right]_F = 0. \qquad (5.6)$$

Здесь $P_к$ и P_0 — давление в каверне и на бесконечности на уровне центра кавитатора; U — потенциальная функция массовых сил. На бесконечности возмущенная скорость должна обращаться в нуль.

Заметим, что в большинстве случаев используется безразмерная форма записи. Иногда встречающиеся размерные величины помечены звездочкой. Основными размерными величинами выбраны: $L_к^*$ — полудлина каверны; V_0^* — скорость движения кавитатора; ρ^* — плотность жидкости; с помощью их другие величины приведены к безразмерному виду, например

$$\Phi = \frac{\Phi^*}{L_к^* V_0^*}, \quad R = \frac{R^*}{L_к^*}, \quad V = \frac{V^*}{V_0^*},$$

$$P = \frac{P^*_{\text{к}}}{\rho^*_0 V^{*2}_0}, \quad t = \frac{t^* V^*_0}{L^*_{\text{к}}}, \quad U = \frac{U^*}{V^{*2}_0}.$$

Уравнения (5.1)—(5.6) записаны в безразмерном виде, а число кавитации в этом случае определяется по формуле

$$\sigma = 2(P_0 - P_{\text{к}}).$$

На некоторых этапах решения используется подвижная декартова система координат $y'oz'$ (в плоскости наблюдения), связанная с центром поперечных сечений, которые последовательно входят в плоскость наблюдения. Ось oy направлена вертикально вверх, а полярный угол θ отсчитывается во всех системах по часовой стрелке от вертикальной оси.

Необходимо определить уравнение возмущенной поверхности каверны (5.3), на которой выполняются кинематическое (5.5) и динамическое (5.6) условия, вне контура течение жидкости описывается уравнением Лапласа (5.1), а на бесконечности жидкости покоится.

Граничные условия. Основное невозмущенное течение (осесимметричное) предполагается известным, а исследованию подлежат поля возмущенных величин, для определения которых применим теорию малых регулярных возмущений [30, 66]. Дифференциальное уравнение Лапласа (5.1) справедливо для мало возмущенных течений, а вид граничных условий для возмущенного состояния необходимо определить на деформированном контуре каверны, который не известен. Поэтому разложим функции в ряд Тейлора в окрестности точек недеформированного контура каверны, который предполагается известным, и получим приближенные выражения этих функций в точках деформированной каверны.

Поскольку предполагается, что возмущения осесимметричного кавитационного течения малы, то потенциал Φ исследуемого течения мало отличается от потенциала Φ_0 осесимметричного отрывного течения и поэтому этот потенциал можно представить в виде

$$\Phi = \Phi_0(t, x, r) + \varphi(t, x, r, \theta). \qquad (5.7)$$

Аналогично представим и радиусы поперечных сечений каверны

$$R = R_0(t, x) + \xi(t, x, \theta). \qquad (5.8)$$

Возмущения потенциала φ и радиуса каверны ξ по теории малых возмущений должны удовлетворять условиям

$$|\nabla\varphi| \ll (\nabla\Phi), \quad |\xi| \ll |R_0|.$$

Представим также давление и потенциальную функцию U в виде

$$(P_{\text{к}})_R = P_{\text{к}0} + \Delta P, \quad (U)_R = U_{\text{к}0} + \Delta U,$$

где индекс «к0» указывает на недеформированную каверну.

Определим вид кинематического (5.5) и динамического (5.6) условий на деформированном контуре каверны $R = R_0 + \xi$ через известные значения на недеформированном контуре $r = R_0$ с помощью разложения в ряд Тейлора. Ограничимся квадратичным приближением формулы Тейлора, поскольку потенциал основного течения Φ_0 точно не известен, потому не имеет смысла учитывать члены, пропорциональные ξ^2 и более высокого порядка малости. Ввиду тонкости каверны в дальнейшем производные по нормали в средней части каверны отождествим с производными по радиусу. Получим следующие выражения для кинематического и динамического условий:

$$\left(\frac{\partial R}{\partial t} + \nabla\Phi\nabla R\right)_{R_0} + \xi\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial R}{\partial t} + \nabla\Phi\nabla R\right)\right]_{R_0} + \frac{1}{2}\xi^2\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{\partial R}{\partial t} + \nabla\Phi\nabla R\right)\right]_{R_0} = 0; \qquad (5.9)$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}V^2 + P_{\text{к}} + U_{\text{к}}\right)_{R_0} + \xi\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial t} + \vec{V}\frac{\partial\vec{V}}{\partial r}\right)_{R_0} + \frac{1}{2}\xi^2\left[\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial t} + \vec{V}\frac{\partial\vec{V}}{\partial r}\right)\Bigg]_{R_0} + \Delta P + \Delta U = P_\infty.$$

Для оценки порядков величин отдельных слагаемых введем параметр тонкости каверны ε, равный обратному значению ее удлинения: $\varepsilon \sim R^*_{\text{к}}/L^*_{\text{к}} = R_{\text{к}}$, и параметр малости возмущений δ, как отношение характерного возмущения к невозмущенному радиусу: $\delta \sim \xi/R_0$. Символом $R_{\text{к}}$ обозначена величина радиуса невозмущенной каверны в миделе, т. е. максимальное значение R_0. Для потенциала осесимметричного течения Φ_0, точное значение которого не известно, воспользуемся приближенным асимптотическим выражением [36]

$$\Phi_0 = R_0\frac{\partial R_0}{\partial t}\ln r + O(\varepsilon^2)$$

и оценим основные величины

$$R_0 \sim \varepsilon, \quad \Phi_0 \sim \varepsilon^2\ln\varepsilon, \quad \xi \sim \varepsilon\delta, \quad \varphi \sim \delta\varepsilon^2\ln\varepsilon.$$

Эти оценки справедливы лишь в средней части тонкой каверны, поэтому в дальнейшем будут рассматриваться тонкие вытянутые каверны, которые образуются при малых числах кавитации.

Сгруппируем в уравнениях (5.9) слагаемые по степеням параметров ε и δ, опустив слагаемые с порядком δ^2, ε^2 и выше в сравнении с порядком единица.

Тогда кинематическое и динамическое условия (5.9) преобразуются к виду

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} - \frac{\partial\varphi}{\partial r} - \xi\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial r^2} = \frac{1}{2}\xi^2\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial r^2} + \xi\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} - \frac{1}{R_0^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\frac{\partial\xi}{\partial\theta}, \qquad (5.10)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\Phi_0}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + \Delta P + U_{\text{к}_0} + \Delta U + \xi\left(\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial r\partial t} + \frac{\partial\Phi_0}{\partial r}\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{\partial\Phi_0}{\partial r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\right) + \frac{1}{2}\xi^2\left[\frac{\partial^3\Phi_0}{\partial r^2\partial t} + \left(\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial r^2}\right)^2 + \frac{\partial\Phi_0}{\partial r}\frac{\partial^3\Phi_0}{\partial r^3}\right] = 0 \quad (r = R_0). \qquad (5.11)$$

В правой части уравнения (5.10) записаны слагаемые, имеющие порядок малости δ по отношению к слагаемым левой части с порядком, равным единице. Перепад давления ΔP выразим через числа кавитации σ_0 осесимметричного и σ_1 возмущенного течений:

$$\Delta P = P_к - P_0 = \frac{\sigma_0 - \sigma_1}{2} = \frac{\Delta\sigma}{2}.$$

Слагаемые потенциальной функции U определяются выражениями

$$U_{к0} = \frac{R_0}{Fr_l^2}\cos\theta, \quad \Delta U = \frac{h + (\xi - h\cos\theta)\cos\theta}{Fr_l^2}, \quad Fr_l^2 = \frac{V_0^{*2}}{g^* L_к^*},$$

где Fr_l — число Фруда по полудлине каверны; $h = \xi_1$ — искривление оси каверны в вертикальной плоскости; g^* — ускорение силы тяжести. В большинстве случаев слагаемым ΔU можно пренебречь.

В общем случае, когда нормаль к кавитатору неколлинеарна с вектором скорости $\overset{*}{V}_0$, действующую на кавитатор силу нормального гидродинамического давления можно разложить на подъемную силу, которая создает вертикальное искривление оси каверны $h \equiv \xi_1$, и боковую, которая приводит к боковому искривлению оси каверны η_1 в горизонтальной плоскости. Наличие этих сил обусловливает движение центра каждого из поперечных сечений каверны вдоль осей oy (вертикально вверх со скоростью $\dot{\xi}_1$) и oz (в горизонтальной плоскости со скоростью $\dot{\eta}_1$). Следовательно, центр подвижной системы координат движется со скоростью $\sqrt{\dot{\xi}_1^2 + \dot{\eta}_1^2}$ и, поскольку динамическое условие относится к неподвижной точке пространства, это необходимо учесть. Возмущение потенциала проще определить в данном случае в подвижной системе координат, связанной с центром движущегося сечения, для чего достаточно учесть это перемещение при вычислении производной по времени

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial'}{\partial t} - \dot{\xi}_1\frac{\partial}{\partial y'} - \dot{\eta}_1\frac{\partial}{\partial z'}.$$

Штрихи указывают на подвижную систему координат, о которой упоминалось ранее.

Кинематическое (5.10) и динамическое (5.11) граничные условия существенно нелинейны, что затрудняет получение в явном виде системы уравнений для нахождения возмущений формы каверны. Некоторые оценки [18] и многочисленные расчеты показали, что кинематическое условие в данном случае допускает существенное упрощение. Фактически оказывается возможным оставить в кинематическом условии лишь линейные относительно деформации слагаемые. Поэтому условие (5.10) можно записать в форме

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{\partial\xi}{\partial t} - \xi\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial r^2} \quad (r = R_0), \tag{5.12}$$

которая была получена Ю. Ф. Журавлевым [50].

В дальнейшем при выводе системы уравнений будут использоваться кинематическое условие вида (5.12) и динамическое вида (5.11).

Уравнения возмущенного движения каверны. При малых числах кавитации тонкая каверна, созданная произвольно ориентированным относительно скорости V_0^* кавитатором, будет несимметричной, для потенциала возмущенных скоростей φ этого течения можно использовать асимптотическое выражение [95]

$$\varphi = b_0 + a_0\ln r + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{r^n}\cos n\theta + \frac{b_n}{r^n}\sin n\theta\right). \tag{5.13}$$

Каждое слагаемое этого выражения является частным решением двухмерного уравнения Лапласа в плоскости $x = \text{const}$. Коэффициенты a_n и b_n являются функциями x и t и могут быть определены из граничных условий в плоскости $x = \text{const}$. Коэффициент b_0 в данной задаче несуществен.

Так как из физических соображений следует, что возмущенная поверхность каверны непрерывна, то несимметричную деформацию $\xi\ (t,\ x,\ \theta)$ границ первоначально осесимметричной каверны в общем случае можно представить сходящимся рядом Фурье по окружной координате:

$$\xi = \xi_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\xi_n\cos n\theta + \eta_n\sin n\theta). \tag{5.14}$$

Здесь ξ_0 — осесимметричное расширение каверны; ξ_1 и η_1 — перемещение поперечных сечений без деформации формы в вертикальной и горизонтальной плоскостях; ξ_n и η_n — деформация самой формы каверны.

Как уже упоминалось, на жидких границах справедливо условие непроницаемости (кинематическое), которое связывает потенциал возмущенного течения φ и деформацию каверны ξ. Используя линейную форму кинематического условия (5.12), подставляем в него выражение для φ из (5.13), ξ из (5.14) и приближенное выражение для потенциала осесимметричной каверны $\Phi_0 = R_0\dot{R}_0\ln r$. Получаем соотношения, определяющие коэффициенты возмущенного потенциала a_n и b_n через коэффициенты ряда Фурье функции ξ:

$$a_0 = \dot{\xi}_0 + \dot{R}_0\frac{\xi_0}{R_0}; \tag{5.15}$$

$$a_n = -\frac{1}{n}R_0^{n+1}\left(\dot{\xi}_n + \dot{R}_0\frac{\xi_n}{R_0}\right),$$

$$b_n = -\frac{1}{n}R_0^{n+1}\left(\dot{\eta}_n + \dot{R}_0\frac{\eta_n}{R_0}\right).$$

Выражение для потенциала несимметричного течения теперь запишется в виде

$$\varphi = R_0\left(\dot{\xi}_0 + \dot{R}_0\frac{\xi_0}{R_0}\right)\ln r -$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R_0^{n+1}}{nr^n}\left[\left(\dot{\xi}_n+\dot{R}_0\frac{\xi_n}{R_0}\right)\cos n\theta+\left(\dot{\eta}_n+\dot{R}_0\frac{\eta_n}{R_0}\right)\sin n\theta\right]. \quad (5.16)$$

Неизвестные коэффициенты a_0, a_n, b_n определяются при помощи динамического условия (5.11). Определим все слагаемые динамического условия и подставим их выражения в (5.11). Сгруппировав слагаемые с одинаковыми множителями $\cos n\theta$ и $\sin n\theta$ и приравняв их суммы нулю, получим бесконечную нелинейную систему дифференциальных уравнений второго порядка для определения коэффициентов возмущения ξ_n и η_n. Каждое из уравнений системы содержит бесконечное число неизвестных ξ_n и η_n, а члены уравнений, представляющие собой различные комбинации этих неизвестных и их производных, имеют разный порядок малости. Упростим полученную систему уравнений, введя дополнительные предположения и выполнив оценку членов уравнений.

Параметр δ был введен ранее для определения малости характерного (основного) возмущения по отношению к радиусу осесимметричной каверны $\delta \sim \frac{\xi}{R_0}$. Предположим, что основными формами возмущений каверны являются величины ξ_1, η_1 (искривление оси каверны в вертикальной и горизонтальной плоскостях) и ξ_2, η_2 (первые члены слагаемых, характеризующих деформацию самой формы каверны), а все остальные возмущения — величины более высокого порядка малости. Эксперименты показывают: если вдоль границ каверны не образуются волны большой амплитуды, величины искривления оси ξ_1 и η_1 будут существенно больше других форм возмущений. Из наблюдений и численных экспериментов известно, что под действием различных возмущающих факторов первоначально осесимметричная каверна сплющивается, а ее поперечные сечения приобретают овалообразную форму. Поскольку основной вклад в описание формы овала вносят вторые члены ряда Фурье ξ_2 и η_2, то их можно считать также основной формой деформации. Поэтому в системе уравнений слагаемые вида $\xi_n\xi_k$ $(n, k > 2)$ можно отбросить, а слагаемые $\xi_1\xi_k$ и $\xi_2\xi_k$ сохранить. Это предположение позволяет существенно упростить систему уравнений; если же пренебречь и слагаемыми порядка ξ_n/R_0 в сравнении с единицей, то система нелинейных дифференциальных уравнений имеет следующий вид:

$$\frac{d^2}{dt^2}(\xi_0 R_0)\ln R_0+\frac{d}{dt}(\dot{R}_0\xi_0)+\frac{1}{2}(\dot{\xi}_1^2+\dot{\eta}_1^2+\dot{\xi}_2^2+\dot{\eta}_2^2)+\Delta P_0+U_0=0,$$

$$\frac{1}{nR_0}\frac{d}{dt}(R_0^2\dot{\xi}_n)-\frac{n-1}{n}\ddot{R}_0\xi_n+\dot{\xi}_1(\dot{\xi}_{n-1}-\dot{\xi}_{n+1})-\dot{\eta}_1(\dot{\eta}_{n-1}+\dot{\eta}_{n+1})-$$
$$-\dot{\xi}_2\dot{\xi}_{n+2}-\dot{\eta}_2\dot{\eta}_{n+2}-U_n-\Delta P_n=0, \quad (5.17)$$

$$\frac{1}{nR_0}\frac{d}{dt}(R_0^2\dot{\eta}_n)-\frac{n-1}{n}\ddot{R}_0\eta_n+\dot{\xi}_1(\dot{\eta}_{n-1}-\dot{\eta}_{n+1})+\dot{\eta}_1(\dot{\xi}_{n-1}+\dot{\xi}_{n+1})-$$
$$-\dot{\xi}_2\dot{\eta}_{n+2}+\dot{\eta}_2\dot{\xi}_{n+2}-\tilde{U}_n-\Delta\tilde{P}_n=0 \quad (n=1,2,\ldots).$$

При $n=1$ в уравнениях следует опустить слагаемые с индексом нуль. Величины U_n, $\tilde{U}_n$ и ΔP_n, $\Delta\tilde{P}_n$ являются коэффициентами разложения в ряд Фурье функций U и ΔP:

$$U=\sum_{n=0}^{\infty}(U_n\cos n\theta+\tilde{U}_n\sin n\theta),$$

$$\Delta P=\sum_{n=0}^{\infty}(\Delta P_n\cos n\theta+\Delta\tilde{P}_n\sin n\theta).$$

Система уравнений (5.17) должна быть дополнена конкретными начальными условиями для функций ξ_n, η_n и их производных $\dot{\xi}_n$, $\dot{\eta}_n$.

Если рассматривать возмущенное кавитационное течение, обладающее симметрией относительно вертикальной плоскости yoz, то система нелинейных дифференциальных уравнений (5.17) в этом случае упрощается и имеет вид

$$\frac{d^2}{dt^2}(\xi_0 R_0)\ln R_0+\frac{d}{dt}(\dot{R}_0\xi_0)+\frac{1}{2}(\dot{\xi}_1^2+\dot{\xi}_2^2)+U_0+\Delta P_0=0, \quad (5.18)$$

$$\frac{1}{nR_0}\frac{d}{dt}(R_0^2\dot{\xi}_n)-\frac{n-1}{n}\ddot{R}_0\xi_n+\dot{\xi}_1(\dot{\xi}_{n-1}-\dot{\xi}_{n+1})-\dot{\xi}_2\xi_{n+2}-$$
$$-U_n-\Delta P_n=0$$
$$(n=1,2,\ldots).$$

Система уравнений вида (5.18) используется при исследовании кавитационных течений за кавитаторами эллиптической формы в весомой жидкости [19, 26, 125].

§ 2. О ГЕОМЕТРИИ КАВЕРН ЗА ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ КАВИТАТОРАМИ

Если форма кавитатора не сильно отличается от круговой, то найти геометрию каверны за таким кавитатором можно с помощью теории малых возмущений. Изучению тонких пространственных каверн за кавитаторами эллиптической формы посвящен ряд работ [16, 18, 19, 50, 52, 125, 127]. Так, в [16, 50, 52] показано, что в невесомой жидкости каверна за эллиптическим кавитатором осциллирует вдоль своей оси около осесимметричной каверны. Ю. Ф. Журавлевым выполнены также экспериментальные исследования каверн за эллиптическими дисками и конусами. Интересны эксперименты Ю. Д. Власенко по изучению каверн за кавитаторами некруговой формы, в частности за эллиптическими кавитаторами [19]. Вентилируемые каверны за прямоугольными пластинами, близкими к эллиптическим, исследовались В. А. Лапиным [76].

Ниже с помощью нелинейной системы дифференциальных уравнений найдена форма пространственной каверны за эллиптическим кавитатором в весомой жидкости.

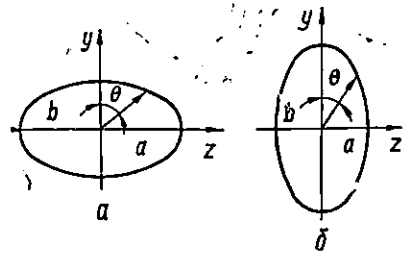


Рис. 5.2. Эллиптические кавитаторы:
а — горизонтальной ориентации; *б* — вертикальной ориентации.

Уравнение поперечного сечения возмущенной каверны, как упоминалось выше, для момента времени $t > 0$ записывается в виде (5.8).

Представим функцию, описывающую форму контура некругового кавитатора в виде сходящегося ряда Фурье по окружной координате

$$R_н(\theta) = R_{н0} + \sum_{n=1}^{\infty} \xi_{n0} \cos n\theta. \tag{5.19}$$

Здесь $R_{н0}$ — радиус некоторого кругового кавитатора; ξ_{n0} — малые возмущения формы кавитатора, отличающие его от круга.

Рассмотрим кавитатор, который в месте срыва струй имеет форму эллипса. На рис. 5.2 показаны эллипсы горизонтальной (*а*) и вертикальной (*б*) ориентаций. Угол θ отсчитывается от вертикальной оси по часовой стрелке. Если исследуется каверна в невесомой жидкости, то ориентация эллипса не имеет значения; в весомой жидкости она существенна.

Запишем каноническое уравнение эллипса в полярных координатах

$$R_н(\theta) = \frac{b}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2\theta}}, \quad e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \quad (b < a),$$
$$R_н(\theta) = \frac{a}{\sqrt{1 - e_1^2 \cos^2\theta_0}}, \quad e_1 = 1 - \frac{a^2}{b^2} \quad (b > a). \tag{5.20}$$

Поскольку эксцентриситет эллипса e^2 меньше единицы, то можно разложить уравнение радиуса $R_н(\theta)$ в ряд по e^2:

$$R_н(\theta) = \begin{matrix} b \\ a \end{matrix}\left[1 + \frac{e^2}{2} \begin{matrix}\sin^2\theta \\ \cos^2\theta\end{matrix} + \frac{3e^4}{8} \begin{matrix}\sin^4\theta \\ \cos^4\theta\end{matrix} + \frac{5e^6}{6} \begin{matrix}\sin^6\theta \\ \cos^6\theta\end{matrix} + \dots\right].$$

Представим степени тригонометрических функций, входящие в это разложение для $R_н(\theta)$, через функции кратных углов и после некоторых преобразований получим следующее выражение [125]:

$$R_н(\theta) = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!\,(2k)!}{(2k)!!\,(k)!} \frac{e^{2k}}{2^{2k}} + \right.$$
$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} (\mp 1)^n \frac{(2k-1)!!\,(2k)!}{(2k)!!\,(k+n)!\,(k-n)!} \frac{e^{2(k-n)}}{2^{2k-1}} e^{2n} \cos 2n\theta\right], \tag{5.21}$$

где верхняя строка соответствует горизонтально вытянутому эллипсу ($b < a$), нижняя — вертикально ориентированному эллипсу ($b > a$). Выражение (5.21) является обычным рядом Фурье, нулевой член которого имеет вид

$$R_{н0} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!\,(2k)!}{(2k)!!\,(k!)^2} \frac{e^{2k}}{2^{2k}}\right]. \tag{5.22}$$

Остальные члены ряда имеют вид

$$\xi_{2n,0} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(2k-1)!!\,(2k)!}{(2k)!!\,(k+n)!\,(k-n)!} \frac{e^{2(k-n)}}{2^{2k-1}} \tag{5.23}$$

Величины $R_{н0}$ и $\xi_{2n,0}$ являются бесконечными рядами по степеням e^2. Эти ряды абсолютно сходятся при $e^2 < 1$, а их суммы по k быстро убывают с ростом номера n.

Учитывая это, можно представить выражение (5.21) в следующем виде:

$$R_н(\theta) = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}\left[R_{н0} + \sum_{n=1}^{\infty} (\mp 1)^n \xi_{2n,0} e^{2n} \cos 2n\theta\right]. \tag{5.24}$$

Выражение (5.24) является уравнением контуров срыва струй. Такое представление уравнения контура срыва позволяет интерпретировать некруговой кавитатор как круговой, на котором в начальный момент действуют возмущения ξ_{n0}. Тогда расчет каверны за эллиптическим кавитатором можно заменить расчетом каверны за круговым кавитатором радиуса $R_{н0}$ при следующих начальных условиях:

$$\begin{aligned} &\xi_0(0) = 0, && \xi_2(0) = \mp e^2\xi_{20}, \\ &\xi_1(0) = 0, && \xi_4(0) = e^4\xi_{40}, \\ &\xi_3(0) = 0, && \xi_6(0) = \mp e^6\xi_{60}, \\ &\xi_5(0) = 0, && \\ &\dots\dots\dots && \end{aligned} \tag{5.25}$$

Верхний знак во всех формулах соответствует случаю $b < a$, а нижний — $b > a$. При $b < a$ в формулах (5.21)—(5.25) выражения в скобках умножаются на b, а при $b > a$ — на a.

Фиктивный круговой кавитатор радиусом $R_{н0}$, контур срыва которого определяется уравнением (5.22), назовем эффективным круговым кавитатором, а его радиус — эффективным радиусом. Преобразуем выражение для эффективного кавитатора, просуммировав ряд (5.22). Если учесть, что $(2k)! = (2k)!!(2k-1)!!$, а $(2k)!! = 2^k k!$, то после некоторых преобразований выражение для $R_{н0}$ приводится к следующему виду:

$$R_{н0} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right]^2 e^{2k}\right\} =$$
$$= \frac{2}{\pi}\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}\frac{2}{\pi} K(e). \tag{5.26}$$

Здесь $K(e)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

К сожалению, все ряды для ξ_{n0} при произвольном значении индекса n просуммировать не удается. Если контур кавитатора близок к эллиптическому (овальный), то в разложении Фурье функции $R_н(\theta)$ коэффициент ξ_{20} является основным [16] и его, как оказалось, можно аппроксимировать простой формулой. Действительно, поскольку $(2k)!! = 2^k k!$, то выражение (5.23) можно преобразовать к виду

$$e^2\xi_{20} = 2\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right]^2 \frac{ke^{2k}}{k+1}\left(\frac{b}{a}\right). \qquad (5.27)$$

Если записать сомножитель $k/(k+1) = 1 - 1/(k+1)$ и заменить $1/(k+1)$ сперва нулем, а потом 1/2 и выделить в полученных выражениях полный эллиптический интеграл первого рода $K(e)$, то полученные мажорантные ряды суммируются, и для ξ_{20} получаются соответственно верхняя и нижняя границы:

$$\frac{2}{\pi}K(e) - 1 < e^2\xi_{20}\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{4}{\pi}K(e) - 2.$$

Поскольку верхняя граница в два раза больше нижней, то целесообразно их уточнить. Это можно сделать, если в выражении (5.27) вычислить, например, два члена ряда, а потом просуммировать оставшиеся члены приближенно:

$$\frac{3}{\pi}K(e) - \frac{3}{8} - \frac{1}{8}e^2 - \frac{3}{128}e^4 < e^2\xi_{20}\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{4}{\pi}K(e) - 2 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{32}e^4.$$

Теперь различия между верхней и нижней границами при величинах эксцентриситетов $e^2 = 0{,}30$; 0,50; 0,75 составляют соответственно 1; 5 и 12 процентов по отношению к нижней границе. Отождествив искомую величину с полусуммой границ, получим приближенное выражение для ξ_{20} с точностью до e^4:

$$e^2\xi_{20}\left(\frac{b}{a}\right) \approx \frac{7}{2}K(e) - \frac{7}{4} - \frac{3}{16}e^2 - \frac{15}{256}e^4.$$

Таким образом, максимальная погрешность в этом случае не превосходит 6 % для эллипса с удлинением $a/b = 2$ ($e^2 = 0{,}75$). Поэтому для таких (и меньших) удлинений последнее слагаемое вообще можно опустить. Аналогично, хотя и более громоздко, можно просуммировать и другие ряды ξ_{n0} для небольших значений индекса n.

Поскольку при фиксированном числе кавитации основные размеры каверны пропорциональны площади кавитатора, то сравним площади заданного эллипса и эффективного кавитатора радиуса $R_{н0}$:

$$S = \pi ab, \quad S_{эф} = \frac{4}{\pi}b^2K^2(e),$$

$$\frac{S_{эф}}{S} = \frac{4}{\pi^2}K^2(e)\sqrt{1-e^2} \approx 1 - \frac{1}{32}e^4 - \frac{1}{32}e^6 + \ldots$$

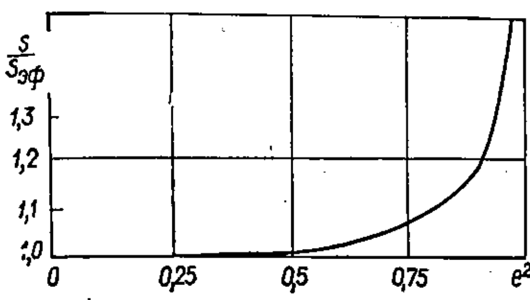


Рис. 5.3. Зависимость отношения площадей $S / S_{эф}$ эллиптического и эффективного кавитаторов от величины эксцентриситета.

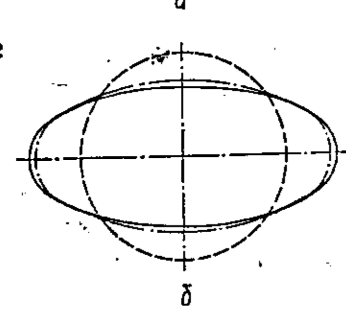


Рис. 5.4. Формы кавитаторов: *а* — при $e^2 = 0{,}5$; *б* — при $e^2 = 0{,}8$.

Хорошо видно, что при не очень больших эксцентриситетах эти площади весьма близки. Представление о количественном характере этой близости дает рис. 5.3, на котором показана зависимость отношения площадей от величины эксцентриситета. Превышение ординаты этой кривой над единицей, умноженное на 100, есть различие площадей в процентах. Для эллипса с удлинением $a/b = 2$ ($e^2 = 0{,}75$) расхождение в площадях меньше 6 %, а при $a/b = 3$ ($e^2 = 0{,}88$) — меньше 15 %. Следовательно, при небольших эксцентриситетах в качестве эффективного может быть взят равновеликий круговой кавитатор, площадь которого равна площади эллипса. Радиус равновеликого кавитатора определяется формулой

$$R_{н0} \approx \sqrt{ab} = \frac{b}{\sqrt{1-e^2}}.$$

Число Фруда, длину и радиус миделева сечения осесимметричной каверны необходимо вычислять по диаметру эффективного кавитатора.

На рис. 5.4 приведены формы кавитаторов: сплошная линия — эллипс, построенный по точному уравнению (5.20), штрихпунктирная — по формуле (5.24) при 14 членах ряда, штриховая — эффективный круговой кавитатор. При небольших значениях эксцентриситета ($e^2 \leqslant 0{,}5$) оба эллипса совпадают (рис. 5.4,*а*), т. е. в этом случае формула (5.24) при $n = 14$ очень хорошо аппроксимирует реальный эллипс. Даже при $e^2 = 0{,}8$ (рис. 5,4,*б*) приближенное уравнение дает результат (штрихпунктирная линия), близкий к точному.

Выполненные расчеты показали, что при $e^2 \leqslant 0{,}7$ для вычисления формы эллиптического кавитатора можно ограничиться семью членами ряда Фурье (т. е. $\xi_{8,0} = 0$), а с увеличением эксцентриситета ($e^2 \to 0{,}8$) необходимо учитывать не менее 14 членов ряда. При дальнейшем росте эксцентриситета ($a/b > 4$) количество членов ряда, подлежащих вы-

числению, стремительно растет, но во всех случаях не будет превышать 50.

Поскольку площади заданного эллиптического и эффективного кавитаторов близки, то и каверны за этими кавитаторами будут различаться мало. Поэтому расчет каверны за эллиптическим кавитатором можно заменить расчетом каверны за круговым эффективным кавитатором с возмущениями.

В невесомой жидкости ($Fr \to \infty$, $\xi_1 = \dot{\xi}_1 = 0$) при малых деформациях система уравнений (5.18), описывающая движение границ возмущенной каверны, распадается на независимые уравнения, которые можно проинтегрировать. Запишем эти уравнения в нормальном виде

$$\ddot{\xi}_n + \frac{2\dot{R}_0}{R_0}\dot{\xi}_n - (n-1)\frac{\ddot{R}_0}{R_0}\xi_n = 0. \quad (5.28)$$

Используя для радиуса осесимметричной каверны выражение из работы [80]

$$R_0^2 = R_{\kappa}^2[1-(1-\lambda^2)(1-t)^2]; \quad \lambda^2 = \frac{4{,}39\sigma}{1+\sigma},$$

производим замену переменной в (5.28)

$$\zeta = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt{1-\lambda^2}(1-t)}{1+\sqrt{1-\lambda^2}(1-t)}$$

и получаем уравнение гармонического осциллятора [19]

$$\xi_n''(\zeta) + (n-1)\xi_n(\zeta) = 0.$$

«Круговая частота» колебаний этого осциллятора равна $\sqrt{n-1}$, а период $-2\pi/\sqrt{n-1}$. Решение, удовлетворяющее начальным условиям (5.25), имеет вид

$$\xi_n(t) = \xi_{n0}\cos\{\sqrt{n-1}[\zeta(t)-\zeta(0)]\}. \quad (5.29)$$

Подобное решение при другой аппроксимации функции R_0 было получено в работе [50]. Функции $\xi_n(t)$ (5.28) имеют нули в точках

$$t_{nm} = \frac{\lambda^2}{\pm\sqrt{1-\lambda^2}\,\mathrm{cth}\,\varphi_{nm} - (1-\lambda^2)},$$

$$\varphi_{nm} = \frac{\pi(2m-1)}{2\sqrt{n-1}} \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Поскольку общее возмущение формы каверны $\xi' = \sum_{n=2}^{\infty}\xi_n\cos n\theta$ является суммой величин $\xi_n(t)$, то нули функции ξ' не будут совпадать с нулями функций $\xi_n(t)$. Но чем быстрее будет сходится ряд ξ', тем ближе нули функции ξ' будут приближаться к нулям функции $\xi_2(t)$, которые при малых числах кавитации представляются

выражением

$$t_{2m} \approx \frac{2\sigma}{\sigma[1+e^{-\pi(2m-1)}]+e^{-\pi(2m-1)}} \quad (m = 1, 2, \ldots). \quad (5.30)$$

Вблизи значений $t = t_{2m}$ поперечные сечения каверны принимают круговую форму, после чего ориентация их осей меняется на противоположную. По виду формулы (5.30) можно заключить, что с уменьшением числа кавитации нули ложатся ближе к кавитатору. Это формальный вывод, так как необходимо помнить, что величина t_{2m} отнесена к полудлине каверны, которая растет с уменьшением σ. Выбрав в качестве линейного масштаба величину, независимую от σ, например $R_{н0}$, получим

$$\frac{t_{2m}}{R_{н0}} \approx \frac{4}{\sigma[1+e^{-\pi(2m-1)}]+e^{-\pi(2m-1)}}, \quad \frac{L_{\kappa}^*}{R_{н0}^*} \sim \frac{2}{\sigma}.$$

Отрицательные значения t_{2m} опущены как не имеющие физического смысла. В действительности с уменьшением числа кавитации сечения, в которых каверна принимает круговую форму, от кавитатора удаляются. Интересно, что для очень малых значений чисел кавитации количество корней уравнения (5.29) на интервале $0 \leqslant t \leqslant 2$ растет. Например, при $\sigma = 0{,}001$ функция ξ_2 дважды меняет знак. Естественно, что корни уравнения (5.29) для ξ_2 и нули функции ξ' не совпадают, поэтому, чтобы определить точно те значения t, где сечения каверны становятся круговыми, необходимо численно решить систему уравнений и определить нули общего искажения формы каверны ξ'.

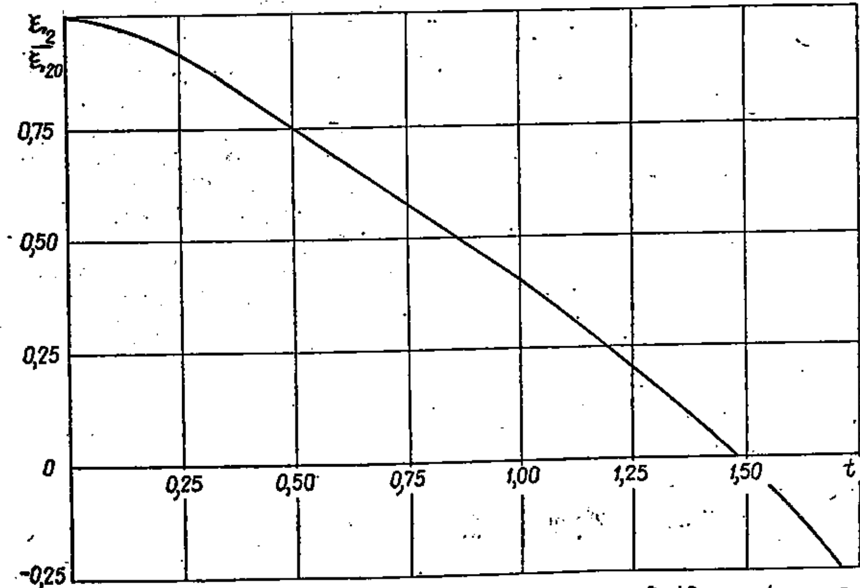


Рис. 5.5. Характер изменения относительного возмущения ξ_2/ξ_{20} по t при $\sigma = 0{,}08$ в невесомой жидкости.

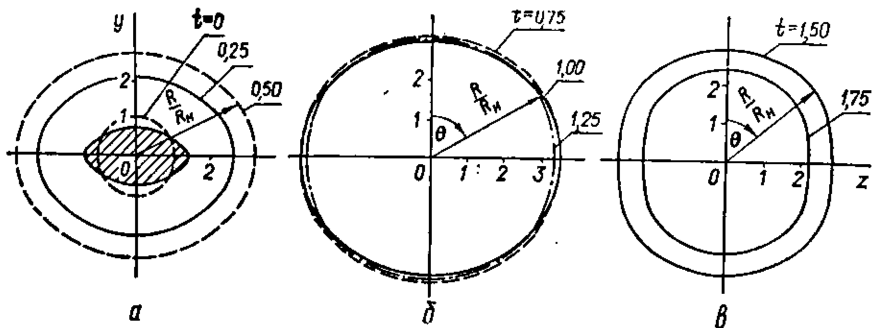


Рис. 5.6. Поперечные сечения каверны при значениях параметров $e^2=0{,}75$; $\sigma=0{,}08$; $\mathrm{Fr}\to\infty$.

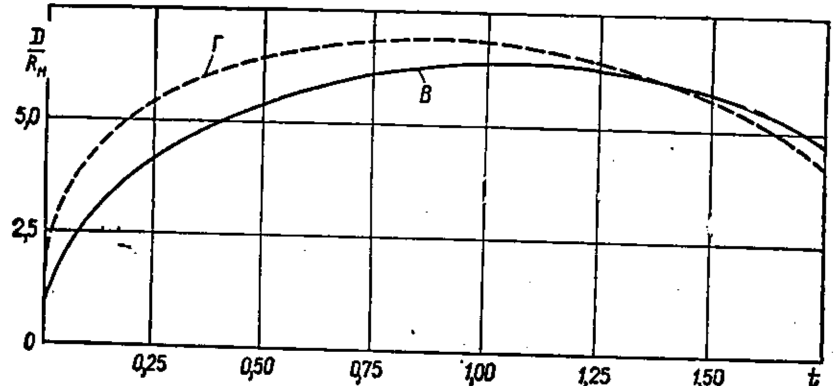


Рис. 5.7. Зависимость вертикального (В) и горизонтального (Г) диаметров каверны от t при $e^2=0{,}75$; $\sigma=0{,}08$; $\mathrm{Fr}\to\infty$.

Следовательно, каверна за эллиптическим кавитатором в невесомой жидкости осциллирует около каверны за эффективным круговым кавитатором и эта осцилляция происходит без затухания.

Этот вывод иллюстрируется рис. 5.5—5.7. На рис. 5.5 приводится график зависимости относительной величины ξ_2/ξ_{20} на интервале $0\leqslant t\leqslant 2$ при $\sigma=0{,}08$ и $\mathrm{Fr}\to\infty$. Оказалось, что на этом интервале ($l=2$ — безразмерная длина каверны) имеется одно значение $t_{21}\approx 1{,}47$, где $\xi_2=0$ и сечение каверны близко к круговому, а сечения справа и слева имеют противоположную ориентацию осей эллипса. На рис. 5.6 изображены поперечные сечения каверны, возникшей за эллиптическим кавитатором в невесомой жидкости при $\sigma=0{,}08$, $e^2=0{,}75$. Эллиптический кавитатор заштрихован, а эффективный круговой помечен штриховыми линиями (рис. 5.6,*а*). В сечениях, близких к кавитатору, каверна сохраняет ориентацию осей и форму, близкую к эллипсу-кавитатору (рис. 5.6,*а*), а вблизи значения $t_{21}\approx 1{,}47$ ее поперечные сечения становятся круговыми. В сечении $t=1{,}75$ (рис. 5.6,*в*) хорошо видна переориентация осей эллипса: первоначально малая ось становится большой при $t>t_{21}$, сечения каверны представляют собой овалы вертикальной ориентации. На рис. 5.7 показана зависимость вертикального и горизонтального диаметров от t. Из приведенных рисунков видно, что переориентация осей каверны происходит возле значения $t\approx 1{,}45$, а это хорошо согласуется с результатом вычисления корня уравнения для ξ_2.

На основе энергетического подхода можно объяснить явление переориентации осей сечений каверны, возникшей за эллиптическим кавитатором, следующим образом. Пронизывая неподвижную плоскость наблюдения, кавитатор образует в ней отверстие, близкое по конфигурации к форме поперечного сечения кавитатора в месте срыва струй. Сорвавшиеся с эллиптического кавитагора жидкие кольца каверны расширяются с разными радиальными скоростями в зависимости от кривизны контура. Чем меньше кривизна контура сечения, тем больше скорость расширения. Энергия, сообщенная жидким частицам границ каверны, расходуется на преодоление разности давлений $\Delta P = P_0 - P_к$, следовательно, скорость расширения каверны постепенно убывает. Поскольку скорость вдоль большой оси эллипса в момент срыва меньше, то она становится нулевой раньше, сечения каверны вдоль этой оси начинают сжиматься. Скорость вдоль малой оси эллипса больше и нулевое значение ее наступает позже, поэтому вдоль малой оси эллипса расширение сечений каверны продолжается дольше. Когда вертикальный и горизонтальный диаметры каверны будут равны, то сечение каверны становится круговым, именно при этом значении параметра $t\approx t_{21}$ происходит переориентация осей эллипса. За этим круговым сечением форма поперечных сечений каверны опять становится овалообразной, но ориентация осей меняется: малая ось до $t<t_{21}$ становится большой осью после этого сечения, а большая — малой.

В весомой жидкости форму каверны за эллиптическим кавитатором можно определить, вычислив на основе системы нелинейных уравнений (5.18) при начальных условиях (5.25) функцию

$$R(t,\theta)=R_0(t)+\sum_{n=2,4,\ldots}^{\infty}\xi_n(t)\cos n\theta.$$

Число Фруда этого кавитационного течения определяется по диаметру $R_{н0}$ эффективного кавитатора.

Было выполнено большое количество расчетов геометрии каверн в весомой жидкости за эллиптическими кавитаторами горизонтальной и вертикальной ориентации, а также для сравнения рассчитаны соответствующие каверны за эффективными круговыми кавитаторами. Анализ этих результатов показал, что при малых эксцентриситетах ($e^2<0{,}5$) почти всю длину каверны, исключая, может быть, небольшой участок возле кавитатора, можно рассчитывать как каверну за эффективным круговым кавитатором радиуса $R_{н0}$. С увеличением эксцентриситета растет и различие между кавернами, образованными заданным эллиптическим и эффективным круговым кавитаторами. Однако даже для эксцентриситетов $e^2\leqslant 0{,}75$ это различие проявляется лишь до миделева сечения, после которого оно незначительно. Поэтому можно сделать следующий вывод: каверна в поперечном поле силы

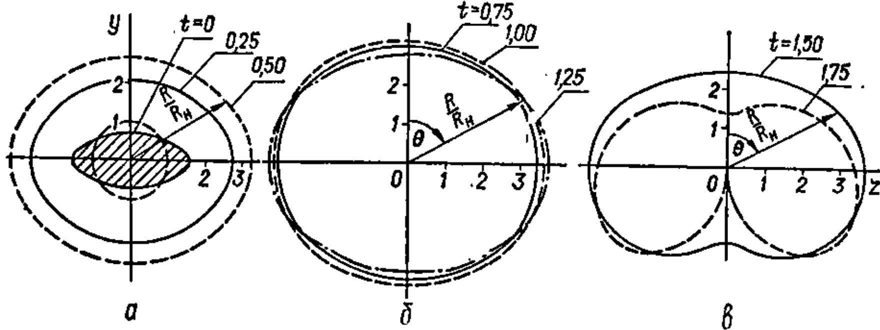


Рис. 5.8. Поперечные сечения каверны за эллиптическим горизонтально ориентированным кавитатором при $e^2=0,75$; $\sigma=0,08$; Fr=10.

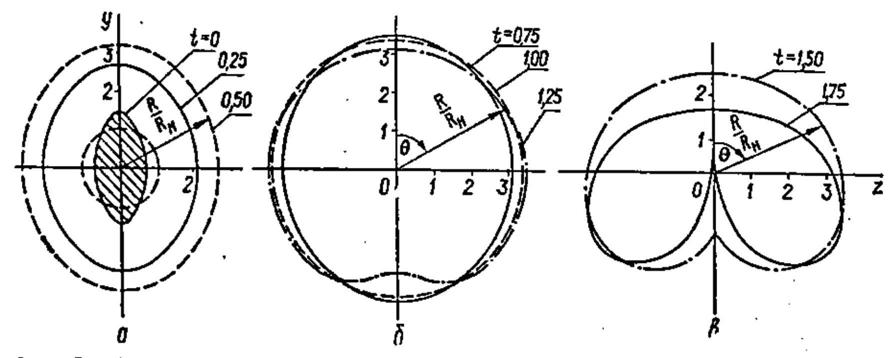


Рис. 5.9. Поперечные сечения каверны за эллиптическим вертикально ориентированным кавитатором при $e^2=0,75$; $\sigma=0,08$; Fr=10.

тяжести за эллиптическим кавитатором в послемидельной части вырождается в такую, которая возникает за эффективным круговым кавитатором. Ориентация эллиптического кавитатора относительно силы тяжести существенной роли не играет. Приводимые ниже рисунки иллюстрируют этот вывод.

Рассмотрим случай существенного влияния весомости на кавитационное течение: $\sigma = 0,08$, $\mathrm{Fr} = 10$ $(\mu = \sigma\sqrt{\sigma}\,\mathrm{Fr}^2 = 2,26)$. На рис. 5.8 и 5.9 изображены поперечные сечения каверн за эллиптическими кавитаторами с эксцентриситетом $e^2 = 0,75$ горизонтальной и вертикальной ориентации. Кавитатор на рисунках заштрихован, а эффективный круговой кавитатор помечен штриховыми линиями. В сечениях, близких к кавитатору (рис. 5.8,*а* и 5.9,*а*), где действие весомости незначительно, форма сечений каверны близка к форме сечений в невесомой жидкости (рис. 5.6,*а*). Деформация, обусловленная весомостью, нарастает по длине каверны и становится особенно значительной в послемидельной части каверны. Форма сечений каверны в средней части и в конце зависит от характера совместного действия формы кавитатора и весомости. Весомость всегда стремится сплющить сечения по вертикали и растянуть их по горизонтали. Независимо от ориентации эллипса сечения каверны стремятся к круговой форме, которая достигается за миделем (рис. 5.8, *б* и 5.9,*б*), после чего форма сечений каверны снова становится эллиптической, но с противоположной ориентацией осей. Оказывается, что при горизонтальной ориентации эллиптического кавитатора процессу интенсивного расширения нижней и верхней частей сечения каверны весомость противодействует, а процесс умеренного расширения боковых сторон сечения ускоряет. Поэтому сечения каверны за эллиптическим кавитатором горизонтальной ориентации почти всегда сохраняют свою ориентацию, деформируясь за миделем аналогично деформированию каверны за диском в весомой жидкости. Переориентация сечений каверны в этом случае не происходит (рис. 5.8, *в*). Если кавитатор вертикально ориентирован, то процессу умеренного расширения верхней и нижней частей сечений каверны весомость противодействует, стремится сплющить их по вертикали, а интенсивному расширению сечений вдоль горизонтальной

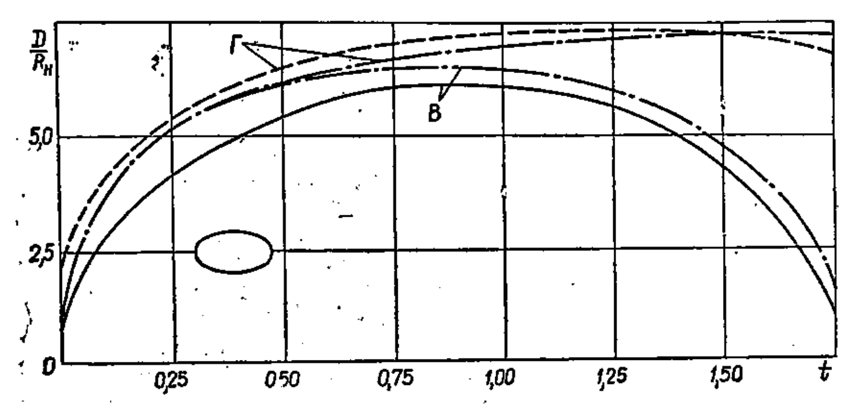


Рис. 5.10. Горизонтальный (Г) и вертикальный (В) диаметры каверны за эллиптическим кавитатором горизонтальной ориентации при $e^2=0,75$; $\sigma=0,08$; Fr=10.

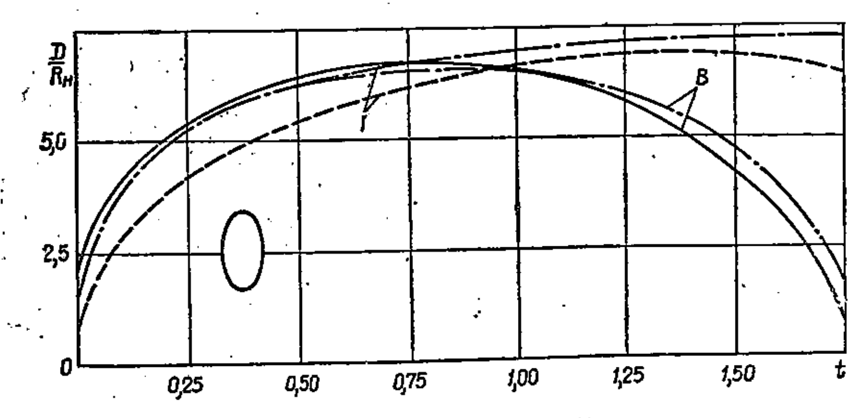


Рис. 5.11. Горизонтальный (Г) и вертикальный (В) диаметры каверны за эллиптическим кавитатором вертикальной ориентации при $e^2=0,75$; $\sigma=0,08$; Fr=10.

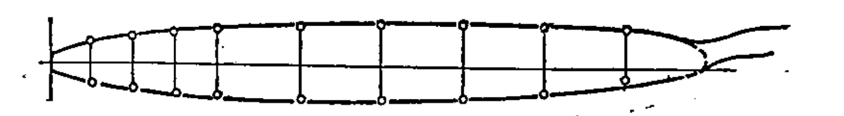
11 — 4-893

оси в послемидельной части весомость способствует. Поэтому сечения такой каверны раньше, чем в невесомой жидкости, становятся круговыми и раньше происходит переориентация осей эллиптических сечений (рис. 5.9, *б*). В дальнейшем сечения каверны за вертикально ориентированным эллиптическим кавитатором деформируются как обычные круговые под действием весомости (рис. 5.9, *в*). Необходимо отметить, что в конце каверны, например при $t = 1{,}75$, деформация сечений каверны за горизонтально ориентированным эллиптическим кавитатором будет несколько меньше (рис. 5.8, *в*), чем каверны за эффективным диском в весомой жидкости, а деформация сечений каверны за вертикально ориентированным кавитатором — несколько больше (рис. 5.9, *в*). На рис. 5.10 и 5.11 приведены величины относительных диаметров $D/R^{н}$ каверн за эллиптическими кавитаторами горизонтальной и вертикальной ориентации соответственно. Горизонтальные диаметры сечений каверны помечены буквой Г, а вертикальные — буквой В. Сплошными линиями обозначены горизонтальные диаметры сечений каверн за эллиптическими кавитаторами, штриховыми — вертикальные диаметры сечений каверн за эллиптическими кавитаторами — штрих-пунктирными — величины диаметров сечений каверны за эффективным круговым кавитатором. Из рис. 5.10 видно, что переориентация малой и большой осей сечений каверны за горизонтально ориентированным эллиптическим кавитатором не происходит. Горизонтальный диаметр как возле кавитатора, так и на протяжении всей длины каверны был большим. Диаметры каверн за эллиптическим кавитатором и эффективным диском по величине довольно близки. Из рис. 5.11 хорошо видно, что диаметры каверн за вертикально ориентированным эллиптическим кавитатором меняют ориентацию, это происходит раньше, чем в невесомой жидкости (см. рис. 5.7). Величины этих диаметров в послемидельной части каверны также мало отличаются от таковых за эффективным круговым кавитатором. Следовательно, при вертикальной ориентации эллиптического кавитатора весомость ускоряет процесс переориентации сечений каверны по сравнению с невесомой жидкостью.

При малом влиянии весомости на кавитационное течение и при достаточно больших эксцентриситетах эллиптического кавитатора ($e^2 \approx \approx 0{,}7$) картина деформации сечений каверны сходна со случаем деформации каверны за эллиптическим кавитатором в невесомой жидкости.

Если же действие весомости значительное, а удлинение эллиптического кавитатора небольшое ($e^2 < 0{,}5$), то деформация сечений каверны за таким кавитатором будет такая же, как деформация каверны за эффективным кругом.

На основе выполненных исследований можно сделать вывод, что расчет каверны за эллиптическим кавитатором не очень большого удлинения можно заменить расчетом каверны за круговым эффективным кавитатором, поскольку формы этих каверн довольно близки. Контуры сечений каверн за эллиптическими кавитаторами разной ориентации как бы осциллируют по длине каверны вдоль контуров сечений каверны за эффективным кругом.



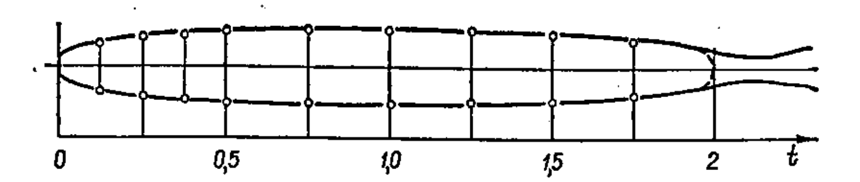
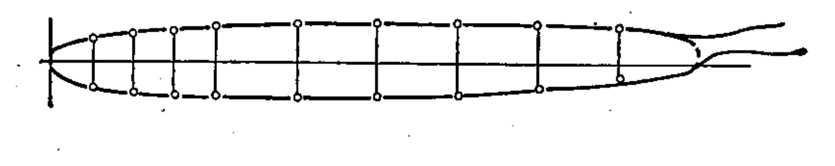


Рис. 5.12. Проекции каверны за горизонтально ориентированным эллиптическим кавитатором при $e^2=0{,}75$; $\sigma=0{,}0478$; Fr=23,7.



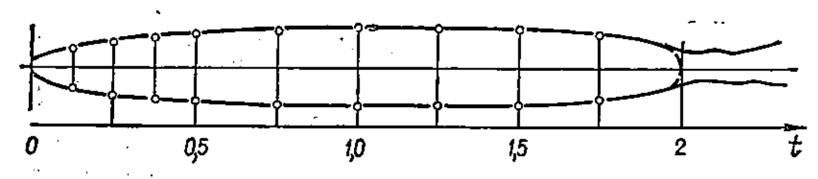


Рис. 5.13. Проекции каверны за вертикально ориентированным эллиптическим кавитатором при $e^2=0{,}75$; $\sigma=0{,}0478$; Fr=23,7.

Проводилось сравнение результатов расчетов и экспериментов, выполненных при одновременном фотографировании горизонтальной и вертикальной проекций каверн за эллиптическими кавитаторами. Эксперименты были выполнены в гидролотке Ю. Д. Власенко. Сравнение показало, что предложенная теория правильно отражает деформирование каверн под комбинированным воздействием весомости и формы кавитатора [19]. Приведем один из этих экспериментов для наглядности.

Рассматривалось кавитационное течение при $\sigma = 0{,}0478$, $Fr = = 23{,}7$ за эллиптическими кавитаторами с отношением осей $a/b = 1{,}5$ и $b/a = 1{,}5$ и диаметром эффективного кавитатора $d_{н\,эф} = 14{,}45$ мм. Результаты обмера вертикальной и горизонтальной проекций каверн за эллиптическими вертикально и горизонтально вытянутыми кавитаторами приводятся на рис. 5.12 и 5.13. Для сравнения на этих же рисунках нанесены результаты расчетов (точки). На рис. 5.14 пока-

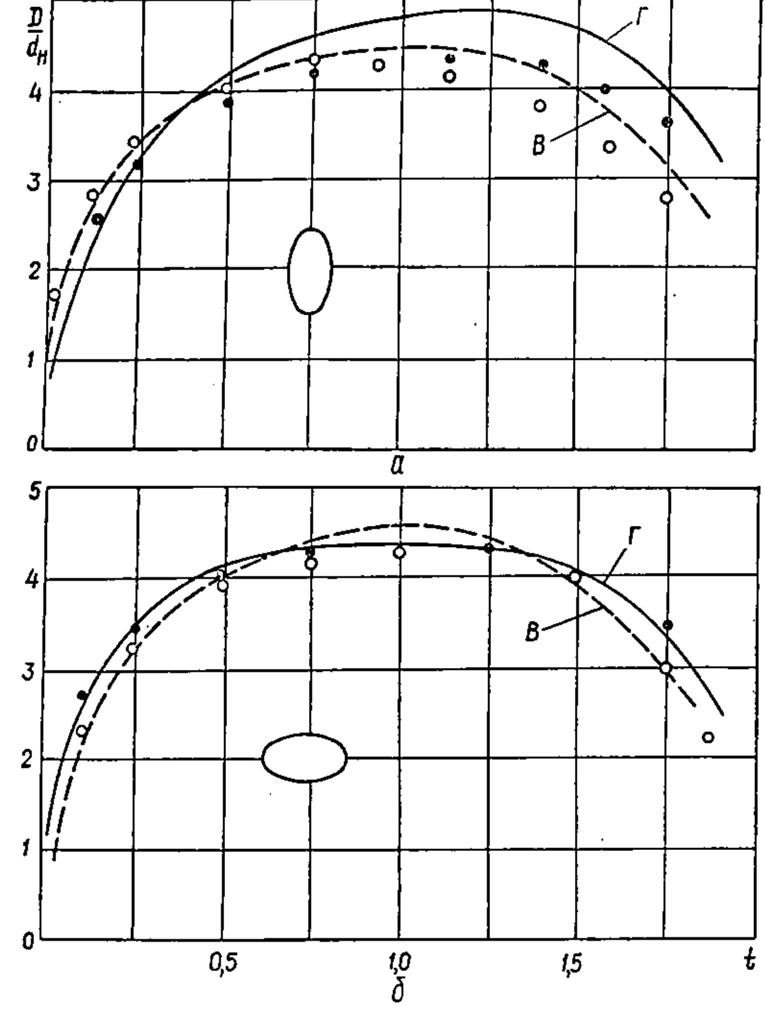


Рис. 5.14. Диаметры каверны за вертикально (*а*) и горизонтально (*б*) ориентированным эллиптическим кавитатором при $e^2=0{,}75$; $\sigma=0{,}0478$; $Fr=23{,}7$.

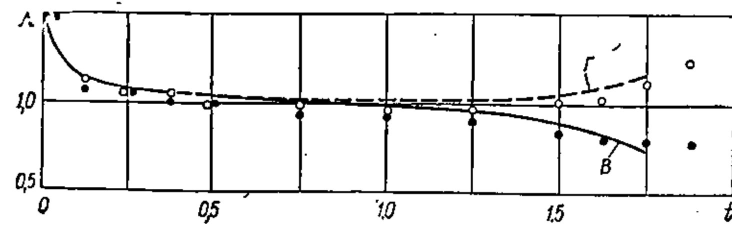


Рис. 5.15. Удлинения каверн за вертикально (В) и горизонтально (Г) вытянутыми эллиптическими кавитаторами.

заны относительные величины $D/d_н$ вертикальных (В) и горизонтальных (Г) диаметров каверн за вертикально и горизонтально ориентированными кавитаторами. На рис. 5.15 приводятся удлинения $\Lambda = D_1/D_2$ каверн за вертикально и горизонтально вытянутыми эллиптическими кавитаторами. Можно отметить хорошее совпадение расчетных и экспериментальных данных, кроме конца каверны за вертикально вытянутым кавитатором. Закономерности деформации сечений каверны под совместным действием весомости и формы кавитатора при данном отношении сторон проявляются довольно четко. Уровень возмущений от весомости не очень велик ($\mu = \sigma\sqrt{\sigma}\,Fr^2 = 5{,}87$). Большая и малая оси сечений каверны за вертикально ориентированным кавитатором меняют ориентацию (рис. 5.14, *а*). Более интересная картина переориентации осей сечений каверны наблюдается за горизонтально вытянутым кавитатором. Деформация, обусловленная весомостью, увеличивается с удалением от кавитатора и в передней части каверны ощущается слабо. Поэтому, как видно из рис. 5.14, *б*, происходит переориентация осей каверны. В передней части каверны сперва вертикальный диаметр сечения был меньше горизонтального ($D_В < D_Г$), а после переориентации он становится бо́льшим ($D_В > D_Г$). Влияние весомости к концу каверны растет, а его действие противоположно в данном случае действию возмущения от формы кавитатора, поэтому приблизительно на расстоянии 3/4 длины каверны начинает преобладать возмущение от весомости. Теперь вертикальные диаметры сечений каверны опять становятся меньше горизонтальных ($D_В < D_Г$). Сила тяжести стремится сплющить сечения каверны по вертикали и ей это удается (в данном случае — в конце каверны).

§ 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМЫ КАВЕРНЫ ПРИ НАЛИЧИИ МЕСТНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ДАВЛЕНИЯ

Рассматриваемые до сих пор течения характеризовались постоянством поля давления вдоль границ каверны. При движении каверны в поле силы тяжести, если даже это движение перпендикулярно вектору ускорения силы тяжести, поле давлений вдоль границ каверны, вообще говоря, переменно, однако это обстоятельство не учитывалось. Тем не менее изложенная выше теория позволяет учитывать изменение поля давлений вдоль жидких границ. Впервые такую задачу в линейной постановке рассматривали Ю. Ф. Журавлев и Б. И. Романовский, предметом исследования которых было изменение давления вдоль границ каверны. Оно вызывалось действием газовых струй, перпендикулярных жидким границам и дискретно распределенных вдоль них в некотором сечении $x = \text{const}$.

Итак, предположим, что в некотором сечении $x = x_0$ каверны имеется местное изменение давления, вызванное истекающими в каверну радиальными дискретно расположенными газовыми струями. Заметим здесь, что причина изменения давления может быть и другая, но характер этого изменения должен сохраняться. Задача определения формы каверны может быть решена на основе линейной системы урав-

нений

$$R_0\xi_0'' + 2R_0'\xi_0' + R_0''\xi_0 = -\frac{\Delta\sigma_0(x,\theta)}{4},$$
$$R_0\xi_n'' + 2R_0'\xi_n' - (n-1)R_0''\xi_n = -\frac{n}{2}\Delta\sigma_n(x,\theta). \tag{5.31}$$

Начальные условия можно считать нулевыми:

$$\xi_0(x_0) = \xi_n(x_0) = \xi_0'(x_0) = \xi_n'(x_0) = 0, \quad n \geqslant 1.$$

Предположим, что изменение давления происходит на малом участке длины каверны и так, что

$$\Delta\sigma(x,\theta) = \begin{cases} 0, & x < x_0, \\ \Delta\sigma(x_0,\theta), & x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \Delta x, \\ 0, & x > x_0 + \Delta x. \end{cases} \tag{5.32}$$

Предположение о малой протяженности участка позволит получить решение задачи в аналитической форме.

Перепишем систему уравнений (5.31) в виде

$$\frac{d^2(R_0\xi_0)}{dx^2} = -\frac{\Delta\sigma_0}{4},$$

$$\frac{d^2(R_0\xi_n)}{dx^2} - nR_0''\xi_n = -\frac{n}{2}\Delta\sigma_n.$$

Проинтегрируем эту систему один раз:

$$\frac{d(R_0\xi_0)}{dx} = -I_0, \quad I_0 = \frac{1}{4}\int\Delta\sigma_0 dx \leqslant \frac{\max\{\Delta\sigma_0\}}{4}\Delta x,$$

$$\frac{d(R_0\xi_n)}{dx} = n\int R_0''\xi_n dx - I_n, \quad I_n = \frac{n}{2}\int\Delta\sigma_n dx.$$

После вторичного интегрирования имеем

$$|R_0\xi_0| = \int I_0 dx \leqslant \frac{\max\{\Delta\sigma_0\}}{4}\,\frac{\Delta x^2}{2}.$$

Значит, величины деформаций на порядок меньше, чем их скорости. В связи с этим

$$\xi_0' = -\frac{1}{4R_0(x_0)}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}\Delta\sigma_0 dx = -\frac{\overline{\Delta\sigma_0}\Delta x}{4R_0(x_0)},$$
$$\xi_n' = -\frac{n}{2R_0(x_0)}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}\Delta\sigma_n dx = -\frac{n\overline{\Delta\sigma_n}\Delta x}{2R_0(x_0)}, \tag{5.34}$$

а величины $\overline{\Delta\sigma_n}$ определяются интегралами

$$\overline{\Delta\sigma_n} = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}\Delta\sigma_n dx. \tag{5.35}$$

Поскольку, как уже указывалось, порядок деформаций по малости выше, чем порядок их скоростей, то имеет смысл решать систему уравнений (5.31) на участке каверны $x > x_0$ при ненулевых начальных условиях:

$$\xi_0(x_0) = \xi_n(x_0) = 0,$$
$$\xi_0'(x_0) = -\frac{\overline{\Delta\sigma_0}\Delta x}{4R_0(x_0)},$$
$$\xi_n'(x_0) = -\frac{n\overline{\Delta\sigma_n}\Delta x}{2R_0(x_0)}. \tag{5.36}$$

При этом можно считать, что для всех $x > x_0$ правые части уравнений (5.31) равны нулю. Таким образом, вместо задачи (5.31) с нулевыми начальными данными можно решать задачу

$$\frac{d^2(R_0\xi_0)}{dx^2} = 0,$$
$$\frac{d^2(R_0\xi_n)}{dx^2} - nR_0''\xi_n = 0 \tag{5.37}$$

при начальных условиях (5.36).

Если для определения радиуса осесимметричной каверны использовать выражение [80]

$$R_0 = R_к\sqrt{1 - a^2(1-x)^2} = R_к f(x), \quad a^2 = 1 - R_1^2/R_к^2,$$

то получим следующие соотношения:

$$\frac{2R_0'}{R_0} = \frac{2a^2(1-x)}{1 - a^2(1-x)^2} = \frac{2a^2(1-x)}{f^2(x)};$$

$$\frac{R_0''}{R_0} = -\frac{a^2}{\sqrt{1 - a^2(1-x)^2}} = -\frac{a^2}{f^4(x)}.$$

Проинтегрировав первое уравнение из (5.37), получим выражения для определения осесимметричной деформации ξ_0 и ее скорости ξ_0' в виде

$$\xi_0(x) = -\frac{\overline{\Delta\sigma_0}\Delta x}{4R_0(x)}(x - x_0),$$
$$\xi_0'(x) = -\frac{\overline{\Delta\sigma_0}\Delta x R_к^2}{4R_0^3(x)}[1 - a^2(1-x)(1-x_0)]. \tag{5.38}$$

Отдельно будем интегрировать уравнение из (5.37) при $n = 1$, поскольку оно имеет иной вид, чем другие уравнения при $n \geqslant 2$. Получим формулы для определения искривления оси и его скорости в виде

$$\xi_1(x) = -\frac{\Delta\bar{\sigma}_1 \Delta x R_0(x_0)}{4aR_к^2} \ln \frac{[1-a(1-x)][1+a(1-x_0)]}{[1+a(1-x)][1-a(1-x_0)]},$$
$$\xi_1'(x) = -\frac{\Delta\bar{\sigma}_1 \Delta x R_0(x_0)}{2R_0^2(x)}. \tag{5.39}$$

Для того чтобы проинтегрировать остальные уравнения из (5.37) при $n > 2$

$$\xi_n'' + \frac{2R_0'}{R_0}\xi_n' - (n-1)\frac{R_0''}{R_0}\xi_n = 0, \tag{5.40}$$

введем замену переменной

$$\zeta = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{dx}{R_0^2(x)}, \quad \zeta = \frac{1}{2aR_к^2} \ln \frac{[1-a(1-x)][1+a(1-x_0)]}{[1-a(1-x_0)][1+a(1-x)]}. \tag{5.41}$$

Тогда получим уравнения

$$\xi_n'' + a^2 R_к^4 (n-1)\xi_n = 0, \quad n > 2,$$

которые являются обычными уравнениями гармонического осциллятора; производная взята по переменной ζ. Общее решение таких однородных уравнений имеет вид

$$\xi_n(\zeta) = A_n \sin(aR_к^2\sqrt{n-1}\zeta) + B_n \cos(aR_к^2\sqrt{n-1}\zeta).$$

Постоянные A_n и B_n будут определяться из начальных условий (5.36):

$$A_n = -\frac{n}{2\sqrt{n-1}aR_к^2}\Delta\bar{\sigma}_n \Delta x R_0(x_0),$$

$$B_n = 0.$$

Запишем теперь общее решение уравнений (5.40) с учетом (5.41) в следующем виде:

$$\xi_n(x) = -\frac{nR_0(x_0)}{2\sqrt{n-1}aR_к^2}\Delta\bar{\sigma}_n \Delta x \sin\left\{\frac{\sqrt{n-1}}{2}\ln\frac{[1-a(1-x)][1+a(1-x_0)]}{[1-a(1-x_0)][1+a(1-x)]}\right\},$$
$$\xi_n'(x) = -\frac{nR_0(x_0)}{2R_0^2(x)}\Delta\bar{\sigma}_n \Delta x \cos\left\{\frac{\sqrt{n-1}}{2}\ln\frac{[1-a(1-x)][1+a(1-x_0)]}{[1-a(1-x_0)][1+a(1-x)]}\right\}. \tag{5.42}$$

Из выражений (5.38), (5.39) и (5.42) видно, что в сечении действия местных возмущений давления при $x = x_0$ осесимметричное расширение, искривление оси каверны и деформации формы каверны ($n \geqslant 2$) отсутствуют, поскольку эти величины при $x = x_0$ равны нулю. Скорости деформаций не равны нулю.

Основная трудность в получении количественных результатов, в частности в определении численных значений деформаций границ каверны, заключается в отсутствии данных о величинах $\Delta\bar{\sigma}_n$, Δx и $2\theta_0$ — угловой ширине «пятна» возмущения давления. Их можно было бы приближенно найти, например, из эксперимента при истечении газовых струй на плоскую недеформированную поверхность.

Для случая i изолированных, не взаимодействующих друг с другом струй можно считать, что величина $R_0(x_0)\,2\theta_0$ приблизительно равна поперечному размеру турбулентной затопленной струи на соответствующем расстоянии от сопла, так что

$$\Delta x \sin\beta \approx 2R_0(x_0)\theta_0,$$

где β — угол между вектором скорости местного возмущения и осью каверны.

Недостаточность информации относительно распределения давления $\Delta P_к(x, \theta_0)$ принуждает, ради упрощения задачи, считать $\Delta x \ll 1$ и вводить осредненную величину $\Delta\bar{\sigma}$. Если T^* — импульс возмущения (например, воздушной струи), то можно предположить, что

$$R_0^*(x_0)\int\limits_{-\theta_0}^{\theta_0} d\theta \int\limits_{x^*(\theta)} \Delta P_к^* dx = \frac{T^*}{i}\sin\beta, \tag{5.43}$$

где $x^*(\theta)$ — граница пятна давления.

Эксперименты показывают, что эпюра избыточных давлений $\Delta P_к^*$ достаточно полная и потому можно сделать такое допущение:

$$\int\limits_{x^*(\theta)} \Delta P_к^* dx = D^* \cos\left(\frac{2\pi}{i}\frac{\theta}{2\theta_0}\right). \tag{5.44}$$

Здесь D^* — амплитуда давления. Подставив выражение (5.44) в (5.43) и выполнив интегрирование, получим выражение для определения амплитуды давления

$$D^* = \frac{\pi T^* \sin\beta}{2i^2\theta_0 R_0^*(x_0)\sin\pi/i}. \tag{5.45}$$

Разделив правую и левую части соотношения (5.44) на величину скоростного напора жидкости $q^* = 1/2\rho^* V_0^{*2}$, получим

$$\int\limits_{x^*(\theta)} \frac{\Delta P_к^* dx}{1/2\rho^* V_0^{*2}} = \frac{D^* \cos\left(\frac{\pi}{i}\frac{\theta}{\theta_0}\right)}{1/2\rho^* V_0^{*2}}. \tag{5.46}$$

Поскольку известно, что

$$\frac{2\Delta P_к^*}{\rho^* V_0^{*2}} = -\Delta\sigma,$$

а также учитывая выражения (5.35) и (5.45), можно получить из (5.46)

соотношение

$$\Delta\bar{\sigma}\Delta x^* = -\frac{\pi L_к^{*2}\sin\beta\cos\left(\frac{\pi}{i}\frac{\theta}{\theta_0}\right)}{2i^2\theta_0 R_0^*(x_0)\sin\frac{\pi}{i}}\,\frac{T^*}{q^* L_к^{*2}},$$

которое в безразмерном виде по полудлине каверны $L_к^*$ представим

$$\Delta\bar{\sigma}\Delta x = -\frac{\pi T\sin\beta}{2i^2\theta_0 R_0(x_0)\sin\frac{\pi}{i}}\cos\left(\frac{\pi}{i}\frac{\theta}{\theta_0}\right), \qquad (5.47)$$

где $T = T^*/q^* L_к^{*2}$ — безразмерная величина.

Разложим правую и левую части этой формулы в ряд Фурье по косинусам на промежутке $\left[0, \frac{2\pi}{i}\right]$. Разложение левой части соотношения (5.47) в ряд имеет вид

$$\Delta\bar{\sigma} = \sum_{n=0}^{\infty}\Delta\bar{\sigma}_n\cos n\theta.$$

В правой части необходимо разложить в ряд Фурье только функцию $\cos\left(\frac{\pi\theta}{i\theta_0}\right)$. В общем случае произвольного числа местных возмущений разложение этой функции в ряд Фурье на промежутке $\left[0, \frac{2\pi}{i}\right]$ имеет вид

$$\cos\left(\frac{\pi}{i}\frac{\theta}{\theta_0}\right) = \frac{2i\theta_0}{\pi} + \frac{i}{i\theta_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos ni\theta_0}{(\pi/2i\theta_0)^2 - n^2}\cos n\theta. \qquad (5.48)$$

Теперь можно записать разложение в ряд Фурье выражения (5.47)

$$\Delta x\sum_{n=0}^{\infty}\Delta\bar{\sigma}_n\cos n\theta = -\frac{\pi T\sin\beta}{2i^2\theta_0\sin\frac{\pi}{i}R_0(x_0)}\left[\frac{2i\theta_0}{\pi^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{i\theta_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos ni\theta_0}{(\pi/2i\theta_0)^2 - n^2}\cos n\theta\right]. \qquad (5.49)$$

Если в этом выражении приравнять члены, стоящие слева и справа множителями при одинаковых значениях косинусов, то можно получить величины всех произведений $\Delta x\Delta\bar{\sigma}_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$, которые используем для определения возмущений ξ_n и их производных ξ_n'. Подставив в (5.38) полученное значение произведения $\Delta x\Delta\bar{\sigma}_n$, найдем величины $\xi_0(x)$ и $\xi_0'(x)$ в виде

$$\xi_0(x) = \frac{(x - x_0)\,T\sin\beta}{4\pi i R_0(x_0)\,R_0(x)\sin\pi/i},$$

$$\xi_0'(x) = \frac{TR_к^2[1 - a^2(1 - x)(1 - x_0)]}{4\pi i R_0(x_0)\,R_0^3(x)\sin\frac{\pi}{i}}. \qquad (5.50)$$

Аналогично, подставив в соотношения (5.39) значение $\Delta x\Delta\bar{\sigma}_1$, получим выражения для искривления оси $\xi_1(x)$ и его скорости $\xi_1'(x)$:

$$\xi_1(x) = \frac{\pi T\sin\beta}{8ai^3R_к^2\sin\frac{\pi}{i}}\,\frac{\cos i\theta_0}{(\pi/2i\,\theta_0)^2 - 1}\ln\frac{[1 - a(1 - x)]\,[1 + a(1 - x_0)]}{[1 + a(1 - x)]\,[1 - a(1 - x_0)]},$$

$$\xi_1'(x) = \frac{\pi T\sin\beta}{4i^3\theta_0^2R_0^2(x)\sin\frac{\pi}{i}}\,\frac{\cos i\theta_0}{(\pi/2i\,\theta_0)^2 - 1}. \qquad (5.51)$$

Подставив в выражения (5.42) значения $\Delta x\Delta\bar{\sigma}_n$, получим формулы для определения возмущений ξ_n и их скоростей ξ_n' в виде

$$\xi_n(x) = \frac{\pi nT\sin\beta}{4a\sqrt{n-1}\,i^3\theta_0^2R_к^2\sin\frac{\pi}{i}}\,\frac{\cos in\,\theta_0}{(\pi/2i\theta_0)^2 - n^2}\times$$

$$\times\sin\left\{\frac{\sqrt{n-1}}{2}\ln\frac{[1 - a(1 - x)]\,[1 + a(1 - x_0)]}{[1 - a(1 - x_0)]\,[1 + a(1 - x)]}\right\}, \qquad (5.52)$$

$$\xi_n'(x) = \frac{\pi nT\sin\beta}{4i^3\theta_0^2R_0^2(x)\sin\frac{\pi}{i}}\,\frac{\cos in\theta_0}{(\pi/2i\,\theta_0)^2 - n^2}\times$$

$$\times\cos\left\{\frac{\sqrt{n-1}}{2}\ln\frac{[1 - a(1 - x)]\,[1 + a(1 - x_0)]}{[1 - a(1 - x_0)]\,[1 + a(1 - x)]}\right\}.$$

Выражения (5.50)—(5.52) можно использовать для определения скоростей возмущений ξ_n' в сечении при $x = x_0$, сами же возмущения ξ_n и в этом сечении, как видно из формул, тождественно равны нулю.

До сих пор в основном излагались результаты, полученные Ю. Ф. Журавлевым и Б. И. Романовским без учета весомости жидкости и на основе линейных уравнений движения жидких границ каверны. Поскольку эксперименты проводились в гидроканале в условиях, когда не всегда можно пренебречь действием поля сил тяжести, представляет интерес решить эту задачу в нелинейной постановке на основе уравнений (5.18). В этом случае в сечении $x = x_0$ деформации жидких границ и скорости этих деформаций уже не будут определяться выражениями (5.36) и аналогичными им: к значениям этих величин должны быть добавлены также деформации и их скорости, вызванные весомостью жидкости. Так что в качестве начальных значений для $\xi_n(x_0)$ и $\xi_n'(x_0)$ должны выступать по крайней мере их суммарные значения.

Как пример рассмотрим кавитационное течение в весомой жидкости при наличии в сечении $x = x_0$ двух местных возмущений давлений $(i = 2)$, которые расположены симметрично относительно оси oz

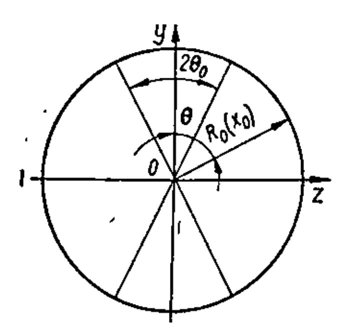
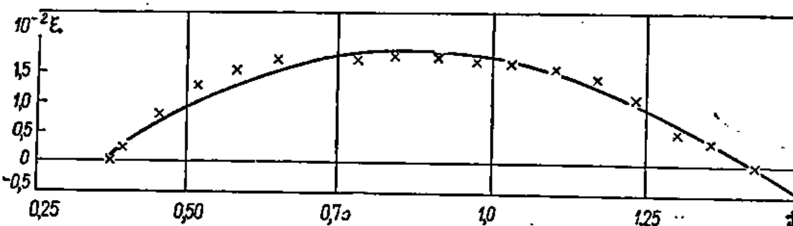
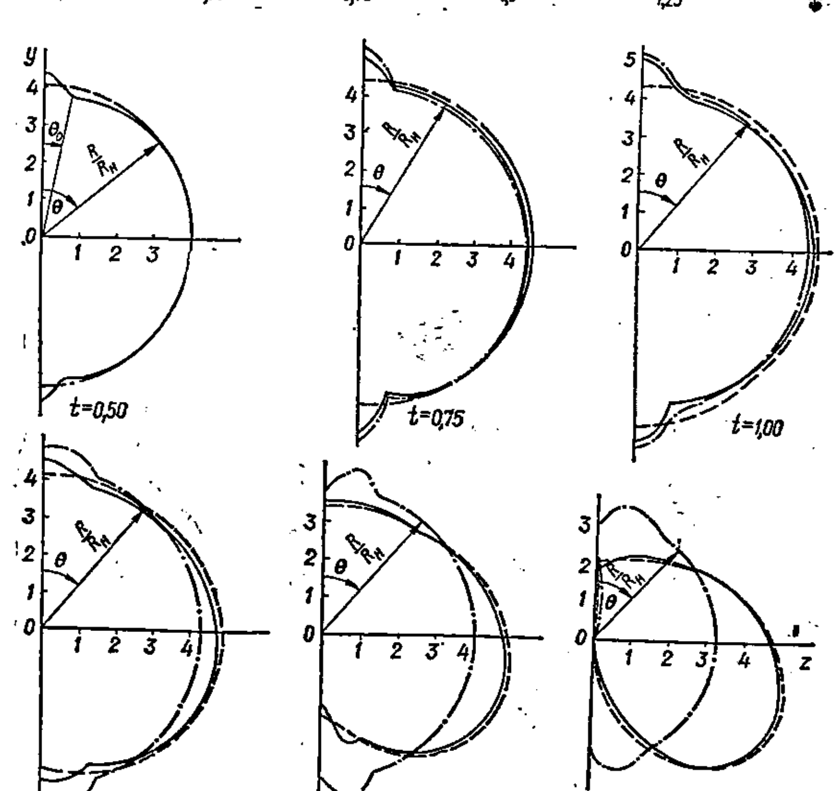


Рис. 5.16. Схема двух изолированных местных возмущений.

Рис. 5.17. Зависимость возмущения каверны ξ от t: сплошная линия — расчетные данные; крестики — экспериментальные.

Рис. 5.18. Поперечные сечения каверны: сплошные линии — каверна в весомой жидкости с двумя местными возмущениями давления; штриховые — каверна в весомой жидкости; штрихпунктирные — каверна в невесомой жидкости с двумя местными возмущениями давления.





(рис. 5.16). Вектор скорости местных возмущений перпендикулярен к оси каверны ($\beta = \frac{\pi}{2}$). Тогда формулы (5.50)—(5.52) для скоростей возмущений можно упростить к виду

$$\xi_0'(x_0) = \frac{T}{8\pi R_0^2(x_0)},$$

$$\xi_n'(x_0) = \frac{\pi n T}{32\theta_0^2 R_0^2(x_0)} \frac{\cos 2n\theta_0}{(\pi/4\theta_0)^2 - n^2} \quad (n \geqslant 1). \tag{5.53}$$

Как видно из второй формулы (5.53), аргументы косинусов являются функциями θ_0, кратными двум, следовательно, скорости возмущений $\xi_n'(x)$ будут не равны нулю только при четном значении индекса n. С учетом этого, преобразуем выражение (5.53) и получим

$$\xi_j'(x_0) = \frac{j\pi T}{16\theta_0^2 R_0^2(x_0)} \frac{\cos j\theta_0}{\left(\frac{\pi}{2\theta_0}\right)^2 - j^2} \quad (j = 2n = 2, 4, \ldots).$$

По этой формуле вычисляются скорости возмущений в сечении $x = x_0$.

На рис. 5.17 приводится график изменения общего искажения радиусов поперечных сечений каверны по ее длине при наличии «сосредоточенных» газовых струй и с учетом поперечного поля силы тяжести. Расчет (сплошная линия) и эксперимент (крестики) были выполнены при $\sigma = 0{,}0432$; $\mathrm{Fr} = 15{,}841$; $T = 5{,}069 \cdot 10^{-5}$; $\theta_0 = 10°$; $x_0 = 0{,}373$. В данном случае влияние поля силы тяжести довольно значительно. Хотя при наличии газовых струй это влияние более сложно, чем без них, тем не менее величина известного параметра, определяющего в этом случае влияние весомости $\mu = \sigma\sqrt{\sigma}\,\mathrm{Fr}^2 = 2{,}26$, такова, что предполагает заметное воздействие его на форму каверны.

Из рис. 5.17 видно, что результаты расчета и экспериментов согласуются вполне удовлетворительно. Небольшое рассогласование вблизи места действия газовых струй практически исчезает по мере удаления. Любопытен характер деформации: она практически симметрична относительно сечения, расположенного вблизи миделя; сначала она нарастает, потом уменьшается до нуля.

На рис. 5.18 показаны расчетные формы шести поперечных сечений каверны: $x = 0{,}50$; $0{,}75$; $1{,}00$; $1{,}25$; $1{,}50$; $1{,}75$. Сплошные линии соответствуют случаю весомой жидкости и двух радиальных струй; штриховые — каверне без струй в весомой жидкости; штрихпунктирные — каверне со струями в невесомой жидкости.

В сечениях, расположенных в передней части каверны, весомость еще сказывается мало, поэтому хорошо видны две симметричные выпуклости от струй. Эти выпуклости практически не зависят от весомости. Различия начинаются за миделем. При этом хорошо видно, что в невесомой жидкости во всех сечениях проявление струй симметрично. К тому же эта особенность в виде струй проявляет себя, как и особенности на кавитаторе: за выступом вскоре появляется впадина.

В самом конце каверны влияние струй уже практически не заметно: форма сечений такая же, как и у каверны без струй.

Аналогично можно рассчитать форму каверны для произвольного количества местных возмущений давления, но только в том случае, когда эти возмущения в момент действия расположены так, что их взаимным влиянием можно пренебречь.

§ 4. ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ КАВЕРНА ЗА КОЛЬЦЕВЫМ ВЫСТУПОМ

Рассмотрим осесимметричную каверну, образующуюся за выступом на внешней поверхности кругового цилиндра (рис. 5.19), который находится в потоке идеальной жидкости, направленном вдоль его образующих. Цилиндр простирается бесконечно далеко вверх по потоку, так что возмущения от его переднего конца отсутствуют.

Число кавитации σ считается малым, а отношение радиуса цилиндра $R_т$ к высоте выступа H — большим.

Радиус наибольшего сечения и форму средней части каверны можно определить методами, изложенными в [80].

Применяя теорему импульсов к жидкости, заключенной внутри контрольной поверхности, которая показана на рис. 5.19, получаем

$$S_к = \frac{W}{k(p_\infty - p_к)} + S_т, \tag{5.54}$$

где $S_к$ — площадь наибольшего сечения каверны; $S_т$ — площадь сечения цилиндра; W — сопротивление выступа; k — поправочный множитель; $k = 0{,}96 - 1$ [80]. Отсюда находим выражение для безразмерного радиуса каверны:

$$r_к = \frac{R_к}{H} = \sqrt{r_т^2 + \frac{c_{xв}}{k\sigma}(2r_т + 1)}, \tag{5.55}$$

где $c_{xв}$ — коэффициент сопротивления выступа;

$$r_т = \frac{R_т}{H}.$$

Форма каверны в средней части описывается уравнением [81]

$$r(\xi) = r_к \sqrt{1 - \left(\frac{\xi}{b}\right)^2}, \tag{5.56}$$

где ξ — расстояние рассматриваемого сечения каверны от наибольшего сечения; b — большая полуось эллипсоида, которым аппроксимируется форма каверны. Здесь и далее все размеры отнесены к высоте выступа H.

Согласно [80]

$$b = 1{,}92^2 r_к \frac{\sqrt{1 - P^2}}{P},$$

где

$$P = \frac{1{,}92\sqrt{k\sigma}}{\sqrt{c_{xд}(1+\sigma)}},$$

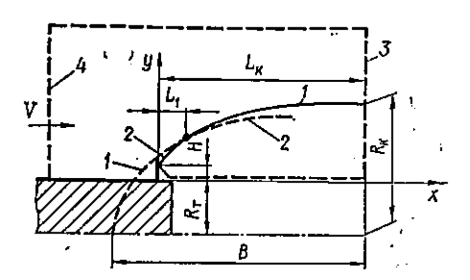


Рис. 5.19. Продольный разрез каверны за кольцевым выступом:

1 — контур эллипсоидальной каверны; 2 — контур каверны за пластинкой; сплошная линия — действительный контур, штриховая — его продолжение; 3 — плоскость наибольшего сечения каверны; 4 — контрольная поверхность; ● — точка согласования.

$c_{xд} = 0{,}82$ — коэффициент сопротивления диска при кавитационном обтекании с числом кавитации $\sigma = 0$.

Формула (5.56) не справедлива вблизи концов каверны и, в частности, около выступа, что не позволяет непосредственно связать контур каверны с формой выступа. Это затруднение можно преодолеть, вводя «переходный участок» [80], контур которого проходит через линию отрыва потока и согласуется с контуром средней части каверны таким образом, чтобы на линии согласования суммарный контур не имел излома.

Если высота выступа H мала по сравнению с радиусом цилиндра $R_т$ $\left(r_т = \frac{R_т}{H} \gg 1\right)$, течение в окрестности выступа будет мало отличаться от плоскопараллельного.

Действительно, вводя новую переменную

$$y = r - r_т, \tag{5.57}$$

получаем, что уравнение Лапласа, которому должен удовлетворять потенциал скорости рассматриваемого течения, принимает вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \frac{1}{r_т\left(1 + \frac{y}{r_т}\right)}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0. \tag{5.58}$$

При $r_т \to \infty$ и ограниченном y (5.58) переходит в двухмерное уравнение Лапласа в меридианальной плоскости x, y. Следовательно, каверна в этой области лишь на малые порядка $1/r_т$ отличается от каверны за выступом той же формы в плоскопараллельном потоке.

Рассмотрим случай, когда обтекаемая жидкостью поверхность кольцевого выступа образована плоскостью, перпендикулярной оси цилиндра. Соответствующей плоской задачей является задача об обтекании пластинки шириной $2H$, перпендикулярной набегающему потоку. Используя решение, полученное на основе схемы течения Рябушинского [41], видим, что координаты точек переходного участка определяются следующими выражениями:

$$x(t) = \frac{x}{H} = \frac{A}{k^2}\{\mathrm{E}(k) + E(t,k) - (1-k^2)[\mathrm{K}(k) - F(t,k)]\}, \tag{5.59}$$

$$r(t) = \frac{R}{H} = r_т + 1 + A\frac{(1-t^2)\sqrt{1-k^2}}{\sqrt{1-k^2t^2} + \sqrt{1-k^2}}, \tag{5.60}$$

где E, K, E, F — эллиптические интегралы.

Модуль k выражается через число кавитации по формуле

$$k = \frac{2\sqrt{1+\sigma}}{\sigma}.$$

Соответственно для дополнительного модуля k' имеем

$$k' = \sqrt{1-k^2} = \frac{\sigma}{2+\sigma}.$$

Параметр t изменяется от -1 до $+1$, причем передней части каверны отвечают значения t, близкие к -1.

Постоянная A, пропорциональная наибольшей ширине каверны, выражается в виде

$$A = \left[\left(\frac{k'}{k}\right)^2 - \frac{1}{k^2}\mathrm{E}(k') - \mathrm{K}(k')\right]^{-1}.$$

Радиус каверны r_c в точке согласования среднего и переходного участков каверны определим из условия равенства производных dx/dr, вычисленных на основании соотношений (5.59) и (5.60), с одной стороны, и (5.56) — с другой. Тогда получим уравнение (см. [41, с. 179])

$$\frac{b}{r_{\text{к}}}\frac{r(t)}{\sqrt{r_{\text{к}}^2 - r^2(t)}} = -\frac{\sqrt{1-t^2}}{t\sqrt{1-k^2}}, \tag{5.61}$$

где зависимость $r(t)$ дается формулой (5.60).

Легко можно показать, что это уравнение имеет корень, которому отвечает значение радиуса согласования r_c, лежащее в нужном интервале $r_{\text{т}} + 1 < r_c < r_{\text{к}}$. Действительно, в точке $t = -1$, отвечающей линии отрыва потока от кромки выступа, левая часть рассматриваемого уравнения положительна, правая обращается в нуль. При увеличении t от -1 до 0 обе части монотонно возрастают.

Поскольку радиус наибольшего сечения осесимметричной каверны больше ширины аналогичной каверны в плоскопараллельном потоке, левая часть уравнения (5.61) остается ограниченной при $t = 0$, отвечающем миделю каверны Рябушинского, когда правая часть стремится к бесконечности. Отсюда следует, что корень в рассматриваемом интервале существует при любых значениях σ и $r_{\text{т}}$. Подставив полученное значение $t = t_c$ в (5.59) и (5.60), находим значения радиуса согласования r_c и расстояния от выступа до точки согласования $l_н = l_1 + b\sqrt{1 - \left(\frac{r_c}{r_{\text{к}}}\right)^2}$. Далее определяем положение наибольшего сечения каверны

$$l_н = l_1 + b\sqrt{1 - \left(\frac{r_c}{r_{\text{к}}}\right)^2}.$$

Переходный участок располагается внутри эллиптического контура, описываемого формулой (5.56). Задачу можно несколько упростить, если вместо решения Рябушинского использовать решение Кирхгофа. В этом случае вместо (5.59) и (5.60) получим

$$x = \frac{2}{4+\pi}\left[q\sqrt{q^2-1} - \ln\left(q + \sqrt{q^2+1}\right)\right], \tag{5.62}$$

где

$$q = (r - r_{\text{т}})\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4}.$$

Уравнение для определения радиуса согласования принимает вид

$$f(r) = f_1(r) - f_2(r) = 0,$$

где

$$f_1(r) = \frac{b}{r_{\text{к}}}\frac{r}{\sqrt{r_{\text{к}}^2 - r^2}},$$

$$f_2(r) = \sqrt{\left[(r - r_{\text{т}})\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4}\right]^2 - 1}. \tag{5.63}$$

Оно приводится к полному уравнению четвертой степени и в рассматриваемом интервале $r_{\text{т}} + 1 < r < r_{\text{к}}$ либо не имеет корней, либо имеет их два. Отсутствие корней уравнения свидетельствует о том, что плоская и осесимметричная каверны не могут быть согласованы указанным образом. Это имеет место при очень больших $r_{\text{т}}$ и больших σ.

Если уравнение (5.62) имеет два корня, то меньший корень соответствует расположению контуров каверн, показанному на рис. 5.19, когда каверна Кирхгофа в своей передней части расположена внутри контура осесимметричной каверны. Больший корень отвечает такому расположению, при котором осесимметричная каверна расположена внутри контура каверны Кирхгофа. Поэтому в качестве радиуса согласования следует принимать значение меньшего корня.

При некоторых дополнительных предположениях можно получить приближенные соотношения, позволяющие выяснить, при каких значениях δ и $r_{\text{т}}$ уравнение (5.62) имеет решение, и найти приближенные значения его корней.

При больших значениях равности $r - r_{\text{т}}$ для функции $f_2(r)$ справедливо асимптотическое представление

$$f_2(r) = (r - r_{\text{т}})\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4} + O\left(\frac{1}{r - r_{\text{т}}}\right). \tag{5.64}$$

Оно оказывается достаточно точным уже при $r - r_{\text{т}} > 2$. Подставляя (5.63) в (5.62) получаем уравнение

$$f_3(r) = \frac{br}{r_{\text{к}}\sqrt{r_{\text{к}}^2 - r^2}} - (r - r_{\text{т}})\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4} = 0, \tag{5.65}$$

левая часть которого имеет при

$$r = r_3 = \sqrt{1 - \frac{\mu^2}{r_{\text{к}}^{2/3}}}$$

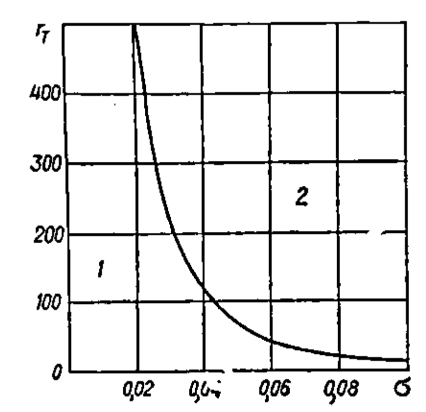
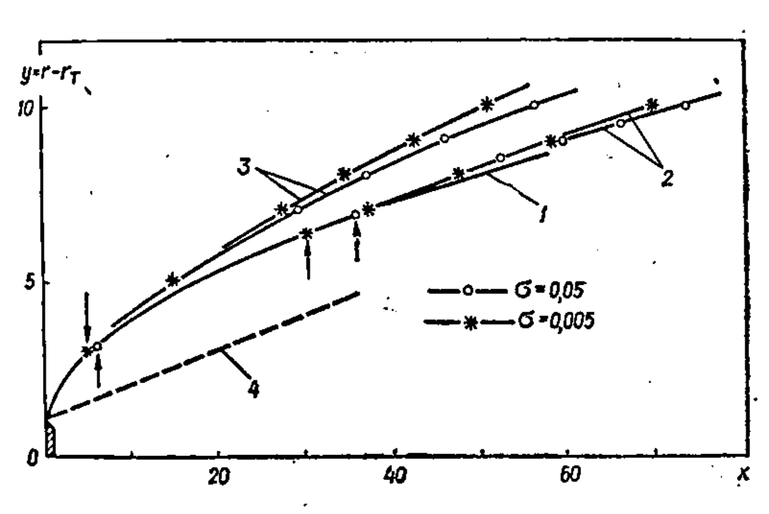


Рис. 5.20. Граница области разрешимости уравнения (5.65):

1 — разрешимо; *2* — неразрешимо.

Рис. 5.21. Форма передней части каверны:

1 — контур каверны Кирхгофа; *2* — средняя часть каверны при $r_т = 50$; *3* — то же при $r_т = 5$; *4* — граница средней части каверны, рассчитанная без учета переходного участка. Стрелками показаны точки согласования.



минимум

$$f_m = \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)\left[r_т - r_к\left(1 - \frac{\mu^2}{r_к^{2/3}}\right)^{3/2}\right] + \frac{\pi}{4}.$$

Здесь $\mu = \sqrt[3]{\frac{4}{4+\pi}\frac{b}{r_к}}$. Если $f_m \leqslant 0$, уравнение (5.65) разрешимо, в противном случае — нет.

Используя выражение (5.55), условие разрешимости можно записать в виде

$$r_т^2 + \frac{c_{xb}}{k\sigma}(2r_т + 1) > \left[\left(r_т + \frac{\pi}{4+\pi}\right)^{2/3} + \mu^2\right]^3. \qquad (5.66)$$

Из (5.66) следует, что уравнение (5.65) становится неразрешимым при $r_т \to \infty$ для любого фиксированного σ. Напротив, оно разрешимо при любом $r_т$, превосходящем некоторое минимальное значение $r_т \approx \approx 1{,}5$, если $\sigma \to 0$.

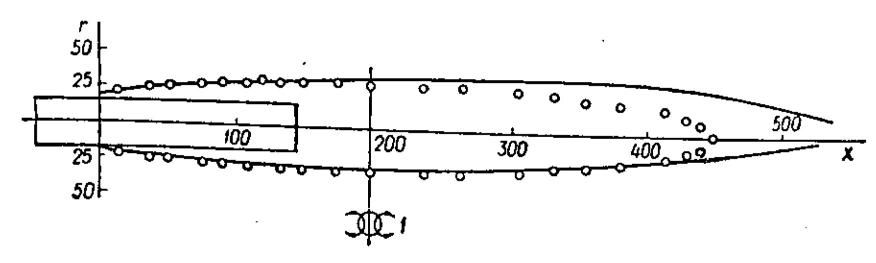


Рис. 5.22. Сравнение расчетного контура (точки) с экспериментом (сплошная линия):

1 — наибольшее сечение расчетного контура.

На рис. 5.20 показана определенная по (5.65) граница области разрешимости уравнения (5.65).

Точка $r = r_з$ разбивает отрезок $r_т + 1 < r < r_к$ на два, содержащих по одному корню уравнения (5.62). Разложив $f_3(r)$ в ряд в окрестности точки $r = r_з$ и оставив члены с $(r - r_з)$, получим квадратное уравнение, корни которого можно использовать в качестве первого приближения к корням уравнения (5.62).

Дальнейшие упрощения можно получить, если функцию $f_1(r)$, определяемую формулой (5.63), разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $r = r_т + 1$. Такое приближение справедливо, когда $r - (r_т + 1)$ мало по сравнению с $r_к - (r_т + 1)$.

Подставив в (5.62) вместо $f_1(r)$ первые два члена этого разложения, а вместо $f_2(r)$ — выражение (5.64), получим линейное уравнение, решение которого имеет вид

$$r_c = r_т + 1 + r_к \frac{(1-a^2)\left(\sqrt{1-a^2} - a\frac{b}{r_к}\right)}{\frac{b}{r_к} - (1-a^2)^{3/2}\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)}, \qquad (5.67)$$

где $a = \frac{r_т + 1}{r_к}$.

Расчеты показали, что формула (5.67) определяет значение с достаточной для практики точностью.

На рис. 5.21 показана форма участка каверны, прилегающего к точке отрыва, при различных значениях σ и $r_т$. Видно, что при увеличении $r_т$ точка согласования смещается вниз по потоку (удаляется от кромки выступа). Уменьшение числа кавитации приводит к ее смещению в обратном направлении. На рисунке показан также контур, который получится, если эллипсоидальную каверну провести непосредственно через срывную кромку.

Такой упрощенный подход дает небольшую (порядка 2%) ошибку при определении длины каверны, но совершенно неприемлем при расчете контура ее передней части.

Обработка результатов выполненных расчетов позволила получить приближенную формулу для расчета положения наибольшего сечения

каверны, справедливую при $\sigma \leqslant 0{,}02$, $45 < r_т < 100$:

$$l_к = (a + b\sigma)\frac{1}{\sigma},$$

где $a = \sqrt{r_т}\left(2{,}44 + \frac{0{,}5}{r_т}\right)$; $b = 0{,}66 r_т + 3{,}5$.

На рис. 5.22 приведены расчетный (точки) и экспериментальный (сплошная линия) контуры каверны при $\sigma = 0{,}048$ и $r_1 = 17{,}3$. Видно хорошее совпадение результатов на большей части длины каверны. Значительные расхождения наблюдаются лишь в хвостовой части, где проявляются не учитываемые при расчете силы весомости.

Следовательно, описанная методика позволяет с достаточной точностью определять форму каверны за кольцевым выступом. Очевидно, что ее можно обобщать на случай выступа, не перпендикулярного к поверхности цилиндра.

ГЛАВА 6

ВЛИЯНИЕ ОРИЕНТАЦИИ КАВИТАТОРА НА ФОРМУ КАВЕРНЫ

§ 1. ВЛИЯНИЕ УГЛОВ НАКЛОНА НА ПОПЕРЕЧНОЕ СУЖЕНИЕ КАВЕРНЫ

В предыдущей главе рассматривались кавитационные течения с возмущениями, когда плоскость срыва струй была расположена перпендикулярно к скорости невозмущенного течения и, следовательно, направление гидродинамической силы на кавитаторе совпадало с направлением скорости невозмущенного движения. Если же эта сила образует с направлением невозмущенной скорости некоторый угол α, то говорят, что кавитатор имеет угол наклона (атаки) α. Под углом атаки можно также понимать угол между векторами невозмущенной скорости V_0^* и нормали к плоскости срыва струй. Кавернообразующее тело в этом случае создает подъемную силу, кавитационное течение будет несимметричным, в том числе и в невесомой жидкости. В течениях такого вида каверны подвергаются более или менее значительным деформациям. Вся каверна искривляется относительно оси невозмущенной каверны в сторону, противоположную действию составляющей гидродинамической силы, нормальной к скорости невозмущенного движения, а поперечные сечения каверны, деформируясь, теряют круговую форму.

Впервые влияние угла атаки на кавитаторе исследовалось Г. В. Логвиновичем [79, 80]. С помощью теоремы импульсов им показано, что наличие подъемной силы всегда ведет к сужению миделевого сечения каверны и появлению искривления оси каверны. Исследуя этот вопрос, Ю. Ф. Журавлев [20, 50] на основе линейной системы уравнений определил искривление оси каверны, вызванное подъемной силой на кавитаторе, движущемся в невесомой жидкости. Полученная им формула для искривления оси каверны идентична формуле, найденной Г. В. Логвиновичем на основе теоремы импульсов.

Дальнейшие исследования о влиянии угла атаки на кавитаторе на геометрию пространственных каверн были выполнены на основе нелинейной системы уравнений В. Н. Буйволом и Ю. Р. Шевчук [16—18, 24, 26], причем введенные уточнения позволяют рассчитывать каверны при довольно больших углах атаки.

Если диск наклонен на угол α к скорости невозмущенного потока, то, как показали эксперименты [80], сила нормального давления на диск выражается соотношением $W_n^* = W_0^* \cos\alpha$, где $W_0^* = c_x S_n^* \rho^* \frac{V_0^{*2}}{2}$ — сила сопротивления диска, плоскость которого перпендикулярна к

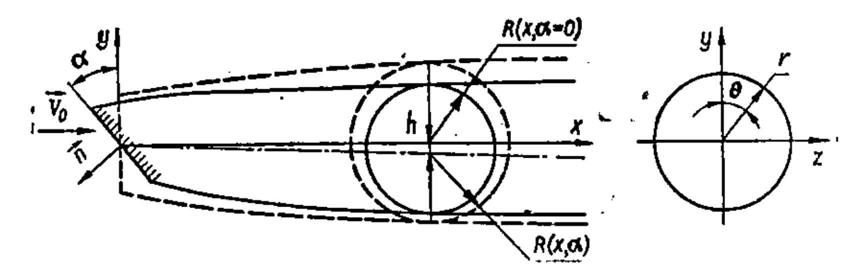


Рис. 6.1. Схема каверны за кавитатором с углом атаки.

скорости невозмущенного течения. Коэффициент сопротивления диска при отличных от нуля числах кавитации равен $c_x \approx c_{x0}(1+\sigma) = 0{,}82(1+\sigma)$. Проектируя силу W_n^* на оси ox и oy, лежащие в плоскости угла α, получаем

$$W_x = W_n \cos\alpha = W_0 \cos^2\alpha, \qquad W_y = W_n \sin\alpha = W_0 \sin\alpha\cos\alpha. \tag{6.1}$$

Эксперименты показывают, что эти формулы справедливы для $\alpha < 45 \div 50°$ [80].

Рассмотрим кавитационное течение за кавитатором, нормаль к которому образует угол α со скоростью невозмущенного течения. Применим теорему импульсов к контрольной поверхности, состоящей из двух перпендикулярных потоку плоскостей (рис. 6.1), из которых одна (Σ_1) отнесена в бесконечность перед кавитатором, а вторая (Σ_2) пересекает каверну по миделевому сечению, и цилиндрической поверхности Σ_3 радиусом $r \to \infty$. Тогда получим [79]

$$W_x^* \approx kS_к^*(P_0^* - P_к^*) + T^*, \qquad W_y^* \approx -\rho^*\pi R^{*2}(x)\, V_0^* v_y^*. \tag{6.2}$$

Здесь $S_к^*$ — площадь миделевого сечения каверны; $P_0^* - P_к^*$ — разность давлений в невозмущенном потоке и каверне; v_y^*—скорость скоса каверны при $x^* = \mathrm{const}$, где радиус каверны равен $R^*(x^*)$; $T^* = \sum_{n=1}^{\infty} T_n^*$ — кинетическая энергия жидкости в единичном кольцевом слое плоскости Σ_2, вызванная поперечным движением и деформациями сечений каверны; $k = k(\sigma) \approx 0{,}96$ — поправочный коэффициент.

При выводе выражений (6.2) учитывалось, что в случае скошенной каверны кинетическая энергия в миделевом сечении не равна нулю, поскольку не равна нулю возмущенная радиальная скорость, а также то, что существует составляющая силы сопротивления вдоль оси oy.

Начальные условия. Форму каверны за кавитатором с углом атаки α можно определить с помощью нелинейной системы уравнений (5.18). Для этого необходимо задать начальные условия решения системы уравнений.

В подвижной системе координат, связанной с центром кавитатора, можно, как это следует из (6.2), определить скорость искривления оси каверны следующим образом:

$$\dot{\xi}_1 = \frac{v_y^*}{V_0^*} = -\frac{W_y^*}{\pi\rho^* R^{*2}(x)\, V_0^{*2}} = -\frac{c_{x0}(1+\sigma)\, R_н^{*2}}{2R^{*2}(x)} \cos\alpha\sin\alpha, \tag{6.3}$$

где $R^*(x)$ — эквивалентный радиус произвольного сечения каверны, которое в общем случае не является круговым. При выводе этой формулы были использованы выражения (6.1) и (6.2). Эту же формулу можно получить также на основе линейной системы уравнений [50]. Выражением (6.3) определяется искривление оси каверны за наклоненным на угол α кавитатором в случае невесомой жидкости.

Если кавитатор движется с углом атаки α, то уже в сечении срыва имеется наклон оси каверны к скорости невозмущенного движения. Из выражения (6.3) можно найти начальное значение производной $\dot{\xi}_1(0)$. Обычно принималось, что срыв струй, даже при угле атаки α на кавитаторе, происходит непосредственно с кавитатора площади $S_н^* = \pi R_н^{*2}$, в знаменателе формулы (6.3) при определении $\dot{\xi}_1(0)$ надо брать $R^*(x) = R^*(0) = R_н^*$. Тогда получим начальные условия для скорости всплывания каверны в виде [80]

$$\dot{\xi}_1 = -\frac{c_{x0}(1+\sigma)}{2}\cos\alpha\sin\alpha = -\frac{0{,}82(1+\sigma)}{4}\sin 2\alpha. \tag{6.4}$$

Действительно, если угол α достаточно мал, то допустимо сносить выполнение начальных условий на плоскость $x = 0$ за кавитатором площади $S^* = \pi R_н^{*2}$. Если же угол атаки α не слишком мал, необходимо учитывать уменьшение площади срыва струй из-за наклона кавитатора на угол α. Поскольку кавитатор площади $S_н^* = \pi R_н^{*2}$ наклонен на угол α к скорости потока V_0^*, то проекция сечения срыва на вертикальную плоскость $x = 0$ будет эллипсом с полуосями $R_н$ (вдоль оси oz) и $R_н \cos\alpha$ (вдоль оси oy), а площадь его вычислится по формуле

$$S(0) = S_н \cos\alpha = \pi R_н^2 \cos\alpha. \tag{6.5}$$

Радиус равновеликого этому эллипсу фиктивного кругового кавитатора равен $R_0 = R_н\sqrt{\cos\alpha}$. Используя это значение в качестве $R(0)$ для определения $\dot{\xi}_1(0)$ по формуле (6.3), получаем

$$\dot{\xi}_1(0) = -\frac{c_{x0}(1+\sigma)}{2}\sin\alpha = -\frac{0{,}82(1+\sigma)}{2}\sin\alpha. \tag{6.6}$$

Эта формула позволяет определить скорость искривления оси каверны в начальный момент при довольно больших углах наклона кавитатора, поэтому в дальнейшем будем ею пользоваться. Такое начальное условие было использовано в работах [26, 128]. Видно, что при $\alpha \ll 1$ применение формул (6.4) и (6.6) приводит к одному и тому же результату.

Известно, что вблизи кавитатора поперечные сечения каверны имеют форму, сходную с конфигурацией плоскости срыва струй. Поэтому кавитатор в данном случае можно считать эллиптическим с полуосями $R_н \cos\alpha$ и $R_н$ и эксцентриситетом $e = \sin\alpha$. Эксперименты, выполненные М. Ю. Цейтлиным [80], подтверждают, что вблизи кавитатора с углом наклона сечения каверны имеют эллиптическую форму.

Для возмущений ξ_n начальные условия при расчете каверн за эллиптическими кавитаторами горизонтальной ориентации с эксцентриситетом $e^2 = \sin^2\alpha$ можно представить в виде (см. гл. 5, § 2)

$$\begin{aligned} &\xi_1(0) = 0, \quad \xi_2(0) = -e^2\xi_{20}, \\ &\xi_3(0) = 0, \quad \xi_4(0) = e^4\xi_{40}, \\ &\xi_5(0) = 0, \quad \xi_6(0) = -e^6\xi_{60}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{6.7}$$

Возмущения $\xi_{2n,0}$ вычисляются по следующим формулам:

$$\xi_{2n,0} = R_н \cos\alpha \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(2k-1)!!\,(2k-1)!}{(2k)!!\,(k+n)!\,(k-n)!} \frac{e^{2(k-n)}}{2^{2k-1}}. \tag{6.8}$$

Начальное условие для возмущения $\xi_0(0)$ не задается, поскольку осесимметричная деформация каверны в данном случае будет вычисляться отдельно, а не из решения системы нелинейных уравнений.

Следовательно, возмущение каверны ξ_n при наличии угла атаки α на кавитаторе определяется решением нелинейной системы уравнений (5.18)

$$\frac{1}{nR_0}\frac{d}{dt}(R_0^2\dot{\xi}_n) - \frac{n-1}{n}\ddot{R}_0\xi_n + \dot{\xi}_1(\dot{\xi}_{n-1} - \dot{\xi}_{n+1}) - \dot{\xi}_2\dot{\xi}_{n+2} - U_n - \Delta P_n = 0 \tag{6.9}$$

$$(n = 1,\ 2,\ \ldots)$$

с начальными условиями для возмущений (6.7) и их скоростей: $\dot{\xi}_1(0)$ вычисляется по формуле (6.6) при условии, что все $\dot{\xi}_n(0) = 0$ $(n \geqslant 2)$.

Осесимметричное сжатие каверны. Второе уравнение из (6.2) для W_y^* связывает подъемную силу и скорость движения недеформированных сечений каверны вдоль оси *оу*. Это движение порождает скос каверны и все деформации более высоких порядков, поэтому можно полагать, что именно оно и содержит максимум кинетической энергии. Найдем возмущенную скорость скоса каверны из выражения (6.2)

$$v_y^* = -\frac{W_y^*}{\rho V_0^* S^*}. \tag{6.10}$$

Кинетическая энергия T^* приближенно постоянна вдоль каверны [79]

$$T^*(t) = T_1^*(t) + \sum_{n=2}^{\infty} T_n^*(t) \approx T_1^*(0).$$

Численно она равна энергии $T^* \approx T_1^*$, определяемой перемещением каверны без деформаций, когда деформации высших порядков еще незначительны и ими можно пренебречь. Здесь скос каверны со скоростью v_y^* имеет основное значение, поэтому, используя (6.10), можно записать приближенное выражение для кинетической энергии

$$T^* \approx T_1^* = \rho^* S_н^*(\alpha)\frac{v_y^{*2}}{2} = \frac{W_y^{*2}}{2\rho^* S_н^*(\alpha) V_0^{*2}}. \tag{6.11}$$

Учитывая это выражение, придадим первому уравнению (6.2), описывающему изменение площади миделевого сечения каверны за наклонным кавитатором, следующий вид:

$$W_x^* = kS_k^*(\alpha)(P_0^* - P_к^*) + \frac{W_y^{*2}}{2\rho^* S_н^*(\alpha) V_0^{*2}}, \tag{6.12}$$

где $S_н^*(\alpha) = S_н^* \cos\alpha$ — площадь проекции кавитатора на вертикальную плоскость $x = 0$.

Введем в рассмотрение некоторое фиктивное течение с давлением

$$\bar{P}_0^* = P_0^* + \frac{1}{2\rho^* k S_к^*(\alpha) S_н^*(\alpha)} \frac{W_y^{*2}}{V_0^{*2}},$$

интерпретируя второе слагаемое как некоторое увеличение давления в невозмущенном набегающем потоке, связанное с силой W_y^*. Тогда уравнение расширения миделевого сечения в таком условном течении имеет вид

$$W_x^* = kS_к^*(\alpha)(\bar{P}_0^* - P_к^*).$$

Учитывая выражения (6.1), выполняем некоторые преобразования и для площади миделевого сечения каверны получаем известную формулу [80]

$$\frac{S_к(\alpha)}{S_н \cos^2\alpha} = \frac{c_x}{k\sigma(\alpha)}. \tag{6.13}$$

Число кавитации этого фиктивного потока можно определить из выражения

$$\sigma(\alpha) = \sigma + \frac{c_x^2 S_н(\alpha)\cos^2\alpha \sin^2\alpha}{4kS_к(\alpha)} = \frac{\sigma}{1 - \dfrac{c_x}{4}\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}}. \tag{6.14}$$

Из соотношения (6.13) следует, что площадь миделевого сечения каверны, образовавшейся за наклонным на угол α кавитатором с площадью сечения срыва $S_н$ и коэффициентом сопротивления c_x в кавитационном течении с числом кавитации σ, будет такой же, как и каверны за перпендикулярным к потоку кавитатором с площадью сечения срыва $S_н \cos^2\alpha$ при том же коэффициенте сопротивления c_x и некотором числе кавитации $\sigma(\alpha)$, которое определяется по формуле (6.14).

Из формул (6.13) и (6.14) следует, что миделево сечение каверны сужается и сплющивается как за счет уменьшения площади сечения срыва, так и за счет увеличения числа кавитации в фиктивном потоке.

Необходимо отметить, что формула (6.14) несколько отличается от приведенных в работах [26, 80]. Это связано с тем, что здесь при выводе выражений (6.13) и (6.14) более последовательно учитывалось уменьшение площади сечения срыва струй $S_н(\alpha) = S_н^* \cos\alpha$ из-за наклона кавитатора на угол α.

Радиус деформированной каверны за кавитатором с углом наклона α вычисляется по формуле

$$R(t, \theta) = R_0(t) + \xi(t, \theta, \alpha) = R_0(t) + \xi_0(\alpha, t) + \sum_{n=2}^{\infty} \xi_n(t) \cos n\theta, \tag{6.15}$$

где $\xi_n(t)$ — коэффициенты Фурье разложения общей деформации, определяющиеся решением системы уравнений (6.9) при начальных условиях (6.6) и (6.7). При решении системы уравнений выражение для радиуса осесимметричной каверны $R_0(t)$ предполагается известным [18, 80]. Вычислив радиусы деформированной каверны по формуле (6.15), включим в состав $R_0(t)$ осесимметричную деформацию $\xi_0(\alpha, t)$ и определим функцию $R_0(\alpha, t) = R_0(t) + \xi_0(\alpha, t)$. При этом необходимо учесть, что осесимметричная деформация каверны за наклонным кавитатором вблизи миделя и кавитатора различна. Выше было показано, что площадь сечения каверны в миделе определяется выражением (6.13). Поскольку возмущенное число кавитации $\sigma(\alpha)$ мало отличается от исходного числа кавитации σ, то из формулы (6.13) следует, что площадь миделя будет такой, как каверны за кавитатором с площадью сечения срыва $\pi R_н^2 \cos^2\alpha$. Однако из физических соображений, а также из некоторых экспериментов [80] известно, что вблизи наклонного кавитатора сечения каверны имеют такую же конфигурацию, как за кавитатором с сечением срыва струй в виде эллипса с полуосями $R_н$ и $R_н \cos\alpha$. Поэтому можно принять, что в данном случае часть каверны около кавитатора будет близкой к той, которая была бы за кавитатором с радиусом сечения срыва $R_н\sqrt{\cos\alpha}$. Следовательно, степень сужения каверны вдоль ее длины различна и меняется от $\sqrt{\cos\alpha}$ до $\cos\alpha$. Поэтому функцию $R_0(\alpha, t)$, учитывающую неравномерное сжатие поперечных сечений каверны, можно представить приближенным выражением вида

$$R_0(\alpha, t) = R_к(\alpha)\,\mu(\alpha, t)\, f(t), \tag{6.16}$$

где $R_к(\alpha)$ — некоторый средний радиус сечения каверны в миделе; $\mu(\alpha, t)$ — корректирующая функция; $f(t)$ — известная функция:

$$f(t) = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{R_н^2}{R_к^2}\right)(1-t)^2}; \qquad R_k^2 = R_н^2 \frac{0{,}84(1+\sigma)}{\sigma}.$$

Средний радиус сечений каверны в миделе и корректирующую функцию можно представить в виде

$$R_к(\alpha) = R_к \cos\alpha, \quad \mu(\alpha, t) = \frac{1}{\sqrt{\cos\alpha}} \begin{cases} 1 - t(1 - \sqrt{\cos\alpha}), & t \leqslant 1, \\ 1 - (2-t)(1 - \sqrt{\cos\alpha}), & t > 1. \end{cases}$$

Теперь для функции $R_0(\alpha, t)$ можно записать следующее выражение:

$$R_0(\alpha, t) = R_к \cos\alpha\,\mu(\alpha, t) \sqrt{1 - \left(1 - \frac{R_н^2}{R_к^2}\right)(1-t)^2}. \tag{6.17}$$

Анализируя уравнение (6.17), видим, что при $t \to 0$ функция $R_0(\alpha, t) \to R_к \cos\alpha$, как и должно быть вблизи миделя. При $t \to 0$ $R_0(\alpha, t) \to R_н\sqrt{\cos\alpha} = R_н(\alpha)$, что наблюдается вблизи кавитатора в экспериментах. Таким образом, введение корректирующей функции $\mu(\alpha, t)$ позволяет получить около кавитатора сужение каверны в $\sqrt{\cos\alpha}$ раз, а вблизи миделя — сжатие в $\cos\alpha$ раз.

Выбор выражения для $R_0(t)$. При нахождении возмущений ξ_n с помощью системы уравнений и вычислений $\dot h(t)$, $h(t)$ предполагается, что значение радиуса осесимметричной каверны $R_0(t)$ известно, например

$$R_0(t) = R_к\sqrt{1 - (1-\lambda^2)(1-t)^2},$$

где λ^2 — известная, зависящая от основного решения величина:

$$\lambda^2 = \frac{R_н^2}{R_к^2} \approx \frac{1{,}19\,\sigma}{1+\sigma}, \text{ либо } \lambda^2 = \frac{R_1^2}{R_к^2} = \frac{(1{,}92\,R_н)^2}{R_к^2} \approx \frac{4{,}39\,\sigma}{1+\sigma}.$$

Кроме того, необходимо учесть, что использование формулы (2.18) предполагает наличие «передней» каверны до точки согласования $t_1 = 2R_н$:

$$R_0 = R_н \sqrt[3]{1 + \frac{3t}{R_н}}, \quad t < t_1,$$

$$R_0 = R_к \sqrt{1 - \left(1 - \frac{R_1^2}{R_к^2}\right)\left(1 - \frac{t - t_1}{l_к}\right)^{2/\varkappa}}, \quad t \geqslant t_1. \tag{6.18}$$

Здесь $l_к = 1 - t_1$ — относительная полудлина каверны без «передней» каверны, т. е. $l_к^* = L_к^* - x_1^*$ [80].

Влияние «передней» каверны на возмущения, порожденные только весомостью, было несущественно, поскольку начальные условия были нулевые, и поэтому оно часто не учитывалось. Когда кавитатор наклонен на угол α, то «переднюю» каверну необходимо учитывать. В противном случае начальные условия будут точно выполняться в сечении «согласования», т. е. на кавитаторе почти вдвое большего радиуса и результаты расчетов будут содержать ошибку. Если же в качестве

Таблица 2

	100 *h*						
t	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75
$\alpha=20°$; $Fr\to\infty$							
1	−2,359	−3,767	−4,881	−5,881	−6,844	−7,833	−8,982
2	−1,057	−1,498	−1,837	−2,147	−2,455	−2,791	−3,223
3	−1,185	−1,633	−1,969	−2,274	−2,579	−2,911	−3,351
$\alpha=20°$; $Fr=10$							
1	−2,100	−2,813	−2,779	−2,110	−0,801	1,228	4,231
2	−0,841	−0,658	0,085	1,399	3,343	6,034	9,831
3	−0,978	−0,829	−0,120	1,160	3,073	5,753	9,622
$\alpha=-20°$; $Fr\to\infty$							
1	2,359	3,767	4,881	5,881	6,844	7,833	8,982
2	1,057	1,498	1,837	2,147	2,455	2,791	3,223
3	1,185	1,633	1,969	2,274	2,579	2,911	3,351
$\alpha=-20°$; $Fr=10$							
1	2,616	4,707	6,915	9,440	12,343	15,689	19,704
2	1,272	2,334	3,739	5,626	8,069	11,169	15,264
3	1,392	2,433	3,800	5,647	8,057	11,152	15,330

$R_0(t)$ используется формула (2.39), то начальные условия выполняются на кавитаторе при $t=0$. В табл. 2 приводятся значения искривления оси каверны $100\,h$, рассчитанные с помощью системы уравнений при различных выражениях для $R_0(t)$: *1* — расчет по (2.17), т. е. без «передней» каверны; *2* — по (6.18), т. е. с «передней» каверной; *3* — по (2.39). В таблице помещены значения $100\,h$, вычисленные при $\sigma=0{,}08$ и углах атаки $\alpha=\pm20°$ в невесомой и весомой жидкостях при числе Фруда $Fr=10$.

Из этой таблицы хорошо видно, что величины искривления оси каверны, полученные с помощью формул (2.39) и (6.18), близки, а вычисленные на основе формулы (2.17) без «передней» каверны неверны. Поэтому при расчетах как формы каверны, так и ее возмущений при наличии угла атаки на кавитаторе можно пользоваться формулами (2.39) и (6.18).

При таких расчетах также можно использовать выражение для $R_0(t)$, предложенное Л. Г. Гузевским:

$$t(s)=\frac{1}{\pi}(s-\sin s),\quad 0\leqslant s\leqslant\pi,$$

$$R_0(s)=R_н+\frac{R_к-R_н}{2}(1-\cos s),$$

но при решении системы уравнений приходится сносить начальные условия на некоторое малое расстояние от начала координат, например $s=0{,}01$ или $s=0{,}001$. Это вызвано тем, что для функций

$$\dot R_0(s)=\frac{\pi(R_к-R_н)\sin s}{2(1-\cos s)},$$

$$\ddot R_0(s)=-\frac{\pi^2(R_к-R_н)}{2(1-\cos s)^2},$$

которые входят в систему уравнений, значение $s=0$ является особым. Все это приводит также к тому, что с помощью такой формулы нельзя рассчитывать каверну за кавитатором с большим углом наклона.

Формы поперечных сечений каверны за кавитатором с углом наклона, вычисленные с использованием формул (2.39), (6.18) и формулы Гузевского, очень близки.

Расчеты проводились в широком диапазоне изменений чисел кавитации σ, Фруда Fr и углов атаки α на ЭВМ БЭСМ-4М. При довольно высоком уровне возмущений от весомости и углах атаки $\alpha=45°$ достаточно было в рядах Фурье учитывать 25 членов, чтобы погрешность в вычислении радиусов поперечных сечений не превышала 1 %.

§ 2. ДЕФОРМАЦИЯ ФОРМЫ КАВЕРНЫ ПОДЪЕМНОЙ СИЛОЙ КАВИТАТОРА

Искривление оси каверны. Интегрируя систему уравнений (6.9) при начальных условиях (6.6) и (6.7), можно определить все формы деформаций ξ_n каверны в весомой жидкости при наличии угла атаки на кавитаторе. На основе выполненных расчетов были построены графики зависимости искривления оси каверны по ее длине от угла атаки в весомой жидкости для разных чисел кавитации и Фруда. На рис. 6.2 приведены зависимости искривления оси каверны от углов атаки $-45°\leqslant\alpha\leqslant45°$ при числе Фруда $Fr=10$ и числах кавитации $\sigma=0{,}08$ (сплошные линии) и $\sigma=0{,}06$ (штриховые линии). На рис. 6.3 изображены графики зависимости искривления оси каверны в широком диапазоне изменения угла наклона $-45°<\alpha\leqslant45°$ при числе Фруда $Fr=50$ и числах кавитации $\sigma=0{,}08$ (сплошные линии) и $\sigma=0{,}02$ (штриховые линии). На рис. 6.4 приведены величины искривления оси каверны при числе кавитации $\sigma=0{,}02$, числах Фруда $Fr=50$ (штриховые линии) и $Fr=100$ (сплошные линии) для $\alpha=0;\ \pm15°,\ \pm45°$. Из рисунков и формул (6.4) и (6.6) хорошо видно, что при положительных углах атаки в передней части каверны искривление ее оси отрицательно. Поскольку искривление оси, порожденное наличием подъемной силы на кавитаторе, всегда отрицательно, а вблизи кавитатора положительная величина искривления оси, вызванная весомостью, еще мала, то суммарное искривление оси каверны в передней части будет также отрицательным, хотя и меньшим по абсолютной величине.

При отрицательных углах атаки на кавитатор действует гидродинамическая сила вниз, искривление оси каверны всегда положительно и положительно искривление оси каверны от весомости. Поэтому общее искривление оси в данном случае суммируется и его абсолютная величина возрастает. Следовательно, взаимодействие искривлений оси каверны от угла атаки и весомости может как увеличивать, так и уменьшать общее искривление оси каверны. Абсолютная величина искривления оси каверны растет с увеличением угла атаки, это хорошо иллюстрирует рис. 6.3, на котором приведены зависимости искривления оси каверны по ее длине при $\sigma = 0{,}08$ и $\mathrm{Fr} = 50$, когда влияние весомости практически не проявляется ($\sigma \sqrt{\sigma}\, \mathrm{Fr}^2 \approx 56$). Из рисунков также видно, что зависимость от t искривления оси при постоянных числах Фруда и кавитации почти на всей длине каверны (кроме передней части) близка к линейной.

Если пренебречь в первом уравнении нелинейной системы (6.9) малым нелинейным слагаемым, то можно определить приближенное значение скорости скоса каверны из соотношения

$$\dot{\xi}_1(t) = \dot{h}(t) = \frac{1}{\mathrm{Fr}_l^2 R_0^2(t)} \int_0^t R_0^2(t)\, dt + \frac{R_н^2(\alpha)}{R_0^2(t)} \dot{\xi}_1(0). \qquad (6.19)$$

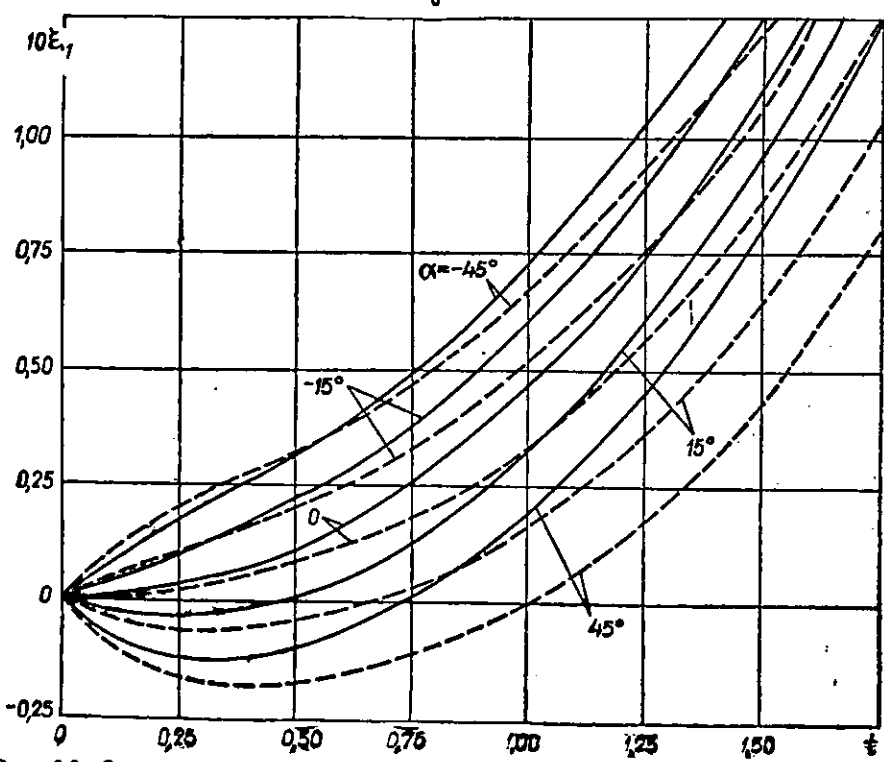


Рис. 6.2. Зависимость искривления оси каверны от угла атаки при $\sigma = 0{,}06$; 0,08; Fr = 10.

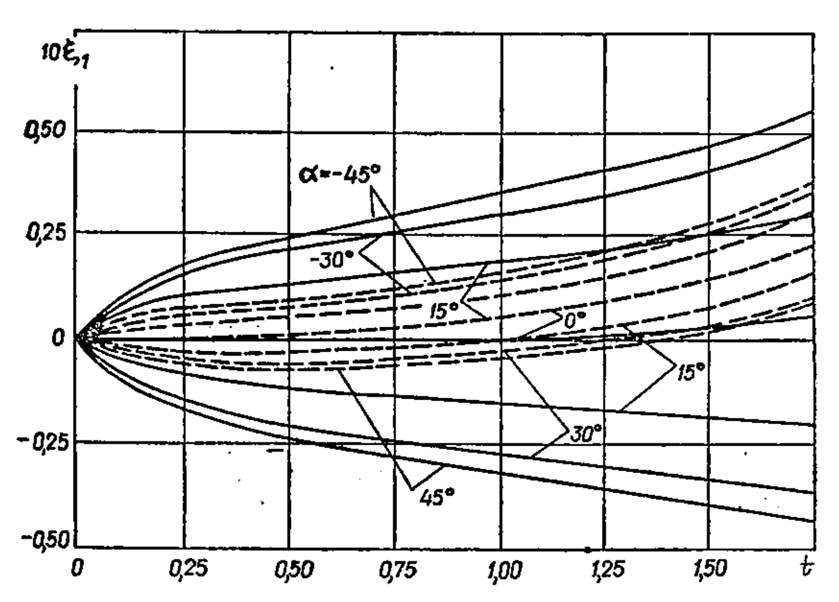


Рис. 6.3. Зависимость искривления оси каверны от угла атаки при $\sigma = 0{,}02$; 0,08; Fr = 50.

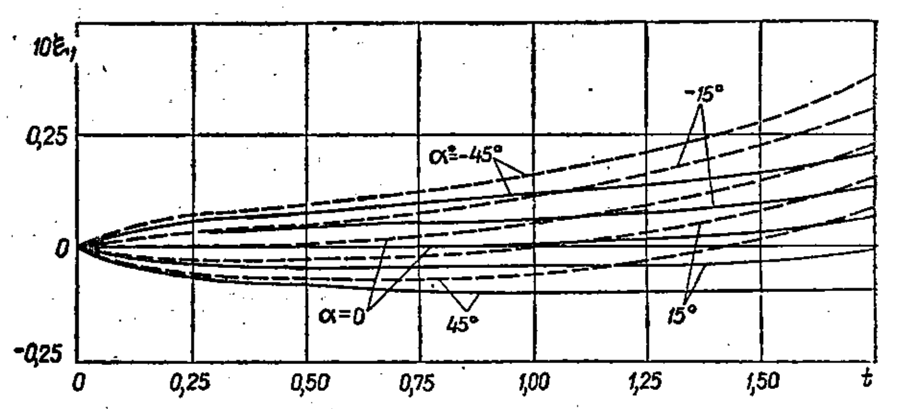


Рис. 6.4. Зависимость искривления оси каверны от угла атаки при $\sigma = 0{,}02$; Fr = 50; 100.

Первое слагаемое — скорость скоса каверны, порожденная поперечным полем силы тяжести, второе — подъемной силой на кавитаторе. Необходимо помнить, что $R_н(\alpha)$ — значение радиуса каверны при $t = 0$ — не совпадает в данном случае с радиусом кавитатора $R_н$. Проинтегрировав выражение (6.19), получим приближенное выражение для скорости искривления оси каверны

$$\dot{h}(t) = \frac{t}{\mathrm{Fr}_l^2} \frac{1 - (1 - \lambda^2)(1 - t + t^2/3)}{1 - (1 - \lambda^2)(1 - t)^2} + \frac{R_0^2(\alpha)}{R_0^2(t)} \dot{h}(0). \qquad (6.20)$$

Значение функции $\dot{h}(0)$ задается формулами (6.6).

Искривление оси каверны, возникшей за наклоненным на угол α кавитатором, в весомой жидкости при использовании для радиуса осесимметричной каверны формулы (2.39) приближенно можно получить, проинтегрировав выражение (6.20)

$$h(t) = \frac{1}{\mathrm{Fr}_l^2}\left[\frac{2+\lambda^2}{6\sqrt{1-\lambda^2}}\ln\frac{\lambda^2+(1-\lambda^2+\sqrt{1-\lambda^2})\,t}{\lambda^2+(1-\lambda^2-\sqrt{1-\lambda^2})\,t} - \frac{t(2-t)}{6} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{3(1-\lambda^2)}\ln\frac{\lambda^2+(1-\lambda^2)(2-t)\,t}{\lambda^2}\right] + \frac{R_н^2(\alpha)}{2R_к^2(\alpha)}\frac{\dot{h}(0)}{\sqrt{1-\lambda^2}} \times \tag{6.21}$$

$$\times \ln\frac{\lambda^2+(1-\lambda^2+\sqrt{1-\lambda^2})\,t}{\lambda^2+(1-\lambda^2-\sqrt{1-\lambda^2})\,t}.$$

В этом выражении слагаемое в квадратных скобках порождено весомостью жидкости, а второе — подъемной силой на кавитаторе. Конечно, эта формула дает приемлемые результаты, когда возмущения малы и можно применить принцип суперпозиции возмущений различной природы.

Если для радиуса осесимметричной каверны использовать формулу (6.18) с «передней» каверной, то необходимо разбить интервал интегрирования $(0, t)$ на два участка $0 \leqslant t \leqslant t_1$ и $t \geqslant t_1$, поскольку на этих участках выражение для $R_0(t)$ имеет разное представление. Проинтегрируем таким образом второе слагаемое выражения (6.20), порожденное наличием подъемной силы на кавитаторе; тогда получим

$$h(t, \alpha) = R_н^2(\alpha)\,\dot{h}(0)\left[\int_0^{t_1}\frac{dt}{R_0^2(t)} + \int_{t_1}^{t}\frac{dt}{R_0^2(t)}\right] = \tag{6.22}$$

$$= R_н^2(\alpha)\,\dot{h}(0)\left[\frac{0{,}92}{R_н} - \frac{1-t_1}{2R_к^2\sqrt{1-\lambda^2}}\ln\frac{\lambda^2+(1-\lambda^2+\sqrt{1-\lambda^2})\dfrac{t-t_1}{1-t_1}}{\lambda^2+(1-\lambda^2-\sqrt{1-\lambda^2})\dfrac{t-t_1}{1-t_1}}\right].$$

Выразив скорость искривления оси каверны в начальный момент через коэффициент подъемной силы $c_y = c_x \sin\alpha\cos\alpha$

$$\dot{h}(0) = -\frac{c_x\sin\alpha}{2} = -\frac{c_y}{2\cos\alpha}$$

и учтя, что $t_1 = 2R_н$ и $R_н(\alpha) = R_н\sqrt{\cos\alpha}$, получим приближенную формулу для определения искривления оси каверны под действием подъемной силы на кавитаторе в виде

$$\frac{2h(t)}{c_y R_н} = -0{,}92 - \frac{(1-2R_н)R_н}{2R_к^2\sqrt{1-\lambda^2}}\ln\frac{\lambda^2+(1-\lambda^2+\sqrt{1-\lambda^2})\dfrac{t-2R_н}{1-2R_н}}{\lambda^2+(1-\lambda^2-\sqrt{1-\lambda^2})\dfrac{t-2R_н}{1-2R_н}}. \tag{6.23}$$

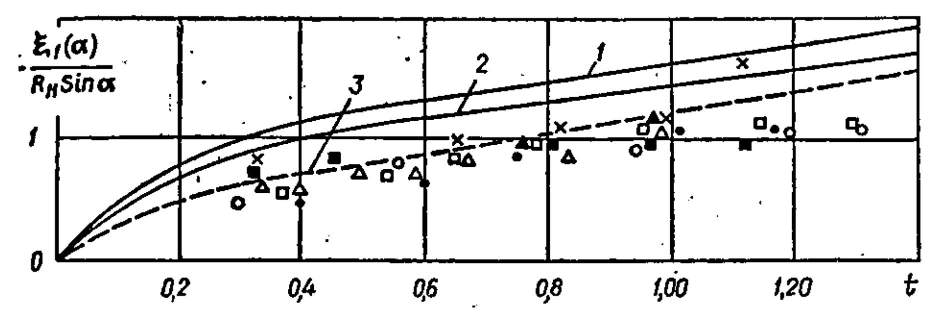


Рис. 6.5. Сравнение теоретических (линии) и экспериментальных (значки) данных — величин искривления оси каверны:

1 — $\sigma = 0{,}0694$, $\alpha = 11{,}5°$; *2* — $\sigma = 0{,}08$, $\alpha = 33{,}5°$; *3* — $\sigma = 0{,}08$, $\alpha = 33{,}5°$.

В этой формуле первое слагаемое, равное постоянной 0,92, является относительной величиной искривления оси каверны в точке «согласования».

Полученные на основе решения системы уравнений теоретические расчеты искривления оси каверны сравнивались с экспериментальными результатами Ю. Ф. Журавлева [50]. Для исключения действия весомости в экспериментах кавитатору-диску придавался угол наклона в горизонтальной, а не вертикальной плоскости. Значительный разброс экспериментальных точек можно объяснить тем, что, во-первых, опыты выполнены при разных числах кавитации; во-вторых, трудностями экспериментального измерения искривления оси каверны. На рис. 6.5 показано сравнение экспериментальных результатов и теоретических расчетов. Кривая *1* — расчет при $\sigma = 0{,}0694$; $\alpha = 11{,}5°$; кривая *2* — расчет при $\sigma = 0{,}08$; $\alpha = 33{,}5°$. Из рисунка видно, что теоретический расчет на основе решения системы уравнений дает постоянное, хотя и небольшое, завышенное значение искривления оси каверны. Кривая *3* (штриховая линия) построена по простой приближенной формуле, справедливой в средней части каверны. Эту формулу можно получить, если заменить во втором интеграле (6.22) значение радиуса $R_0(t)$ его значением в миделе $R_к(\alpha)$ и проинтегрировать полученное выражение:

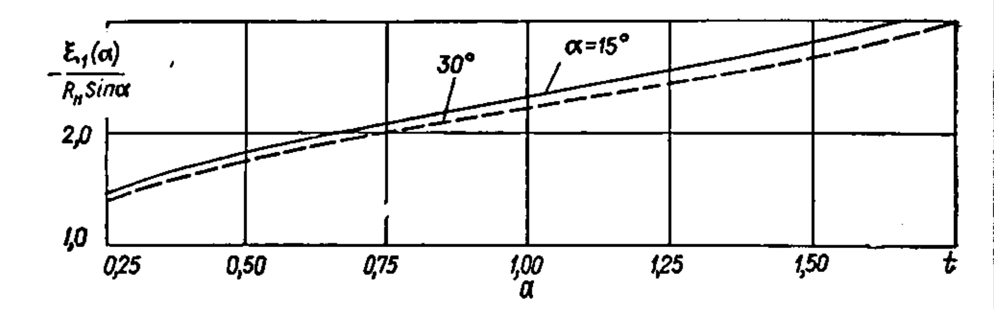
$$h(t, \alpha) = R_н^2(\alpha)\,\dot{h}(0)\left[\frac{0{,}92}{R_н} + \frac{t-t_1}{R_к^2(\alpha)}\right] = R_н^2(\alpha)\,\dot{h}(0)\left[\frac{0{,}92}{R_н} + \frac{t-2R_н}{R_к^2(\alpha)}\right].$$

Произведем оценки некоторых величин, входящих в это выражение

$$\frac{R_к^2(\alpha)}{R_н^2(\alpha)} \approx \frac{c_x}{k\sigma} \sim \frac{1}{6}, \quad R_н(\alpha) \approx R_н, \quad \frac{c_x}{k} \sim 1,$$

$$\frac{R_к^2(\alpha)}{R_н(\alpha)} \approx \frac{R_к^*}{L_к^*}\frac{R_к^*}{R_н^*} \approx \sqrt{\frac{c_x}{k\sigma}}\,\frac{\sigma}{1{,}92-3\sigma}\sqrt{\frac{c_x}{k\sigma}} \sim \frac{c_x}{2k} \sim \frac{1}{2}.$$

Тогда получим следующую приближенную формулу для определения искривления оси каверны под действием подъемной силы на ка-



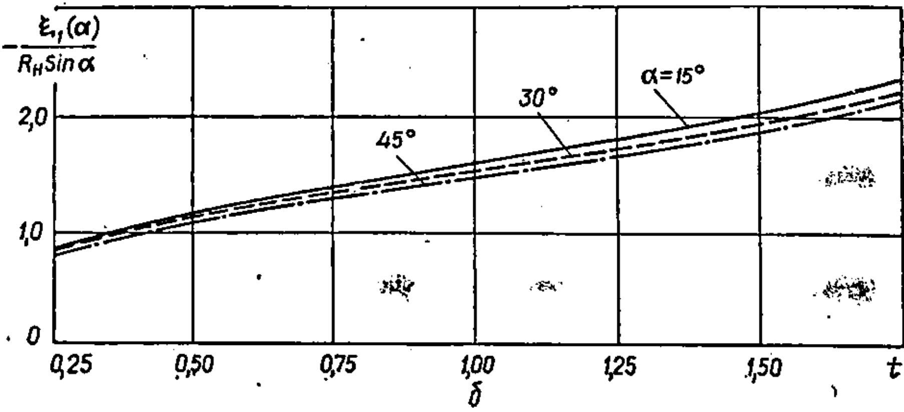


Рис. 6.6. Зависимость относительного искривления оси каверны $\xi_1/R_н \sin\alpha$ от углов атаки:
а — σ=0,02; *б* — σ=0,08.

витаторе:

$$\frac{h(t, \alpha)}{R_н(\alpha)\,\dot{h}(0)} \approx 0{,}92 - 2\sigma + 2t. \qquad (6.24)$$

Эта формула очень проста и удобна, но она дает несколько заниженные результаты по сравнению с решением системы уравнений, что хорошо видно из рис. 6.5. Можно получить также простую приближенную формулу для определения искривления оси каверны под комбинированным воздействием весомости и угла атаки, если действие весомости учитывать приближенным выражением [18]. Тогда

$$h(t, \alpha, \mathrm{Fr}) = \frac{(1+\sigma)t^2}{3\,\mathrm{Fr}_l^2} - \frac{R_н c_y}{2}(0{,}92 - 2\sigma + 2t). \qquad (6.25)$$

Как видно из этой формулы, искривление оси каверны, порожденное весомостью, растет по квадратичному закону, а вызванное подъемной силой на кавитаторе — по линейному. Поэтому эти слагаемые компенсировать друг друга по всей длине каверны не могут, хотя может быть некая точка, координата которой является решением квадратного уравнения (6.25), где общее искривление оси будет нулевым. Но ослабить действие весомости на каком-либо участке на каверну можно, подобрав соответствующим образом положительный угол атаки.

Если в невесомой жидкости на кавитаторе имеется угол атаки α, то приближенное выражение для определения искривления оси каверны (6.24) записывается в виде

$$\frac{h(t, \alpha)}{R_н \sin\alpha} = -\frac{c_x}{2}(0{,}92 - 2\sigma + 2t). \qquad (6.26)$$

Искривление оси каверны, отнесенное к проекции радиуса плоскости срыва на направление движения, как следует из формулы (6.26), не зависит практически от угла наклона α и пропорционально коэффициенту сопротивления кавитатора.

Было выполнено много расчетов искривления оси каверны под воздействием угла атаки на кавитаторе в широком диапазоне изменения числа кавитации $\sigma = 0{,}02 \div 0{,}10$ при α, равном 15, 30 и 45° в невесомой жидкости ($\mathrm{Fr} \to \infty$). Расчеты подтвердили выводы из формулы (6.26), что величина $\xi_1/R_н \sin\alpha$ несущественно меняется при изменении угла атаки на кавитаторе от 15 до 45°. Это хорошо иллюстрирует рис. 6.6, на котором приведены кривые $\xi_1/R_н \sin\alpha$ для различных σ. Даже в конце каверны ($t = 1{,}75$), где величина искривления оси обычно наибольшая, с увеличением угла α на 15° величина относительного искривления оси убывает всего на 3—4% для указанного диапазона изменения числа кавитации. Поскольку на всех рисунках кривая $\xi_1/R_н \sin\alpha$ при α=30° мало отличается от кривых при α=15; 45°, и находится посредине, то будем считать эту кривую средним значением при данном числе кавитации. На рис. 6.7 приводятся кривые $\xi_1/R_н \sin\alpha$ при разных числах кавитации $\sigma = 0{,}02 \div 0{,}10$ для угла наклона кавитатора α = 30°. Из рисунка видно, что с увеличением числа кавитации величины относительного искривления оси каверны уменьшаются, но даже в конце каверны для чисел кавитации σ = = 0,02; 0,10 они отличаются всего в полтора раза.

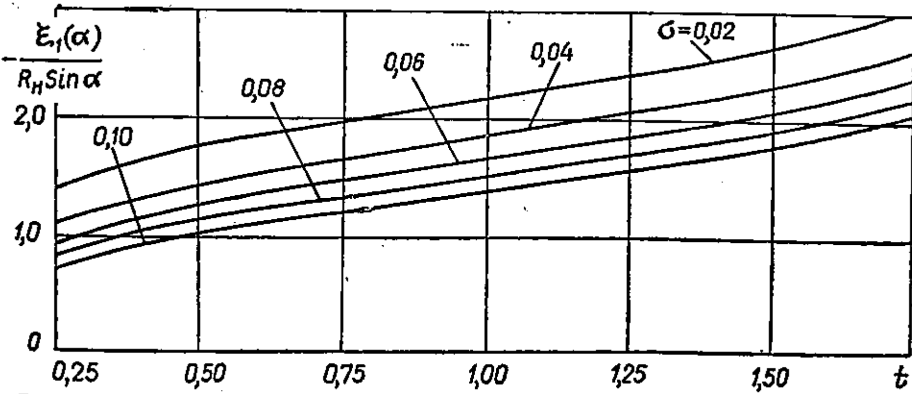


Рис. 6.7. Зависимость относительного искривления оси каверны $\xi_1/R_н \sin\alpha$ от числа кавитации при α=30°.

Деформация поперечных сечений каверны. Проинтегрировав систему уравнений (6.9) при начальных условиях (6.6), (6.7) и числе кавитации $\sigma(\alpha)$ (6.14), определим радиусы деформированной каверны $R(\alpha, t)$ по формуле (6.15), где $R_0(\alpha, t)$ определяется выражением (6.17). Влияние угла наклона на сечения каверны довольно сложное; оно приводит к уменьшению площади поперечных сечений как из-за уменьшения эффективной площади сечения срыва струй, так и из-за того, что каверна оказывается в условиях повышенного давления (растет число кавитации), а, кроме того, происходит изменение конфигурации сечений каверны.

Результаты некоторых расчетов показаны на рис. 6.8—6.13, на которых изображены расчетные значения радиусов поперечных сечений $R/R_н$ при $t = 0{,}25 \div 1{,}75$ для различных величин угла $0 \leqslant \theta \leqslant \leqslant 360°$. Радиусы сечений отнесены к радиусу равновеликого по площади насадка круговой формы, а функция R_0, которая используется в расчетах при решении системы уравнений, определяется выражением

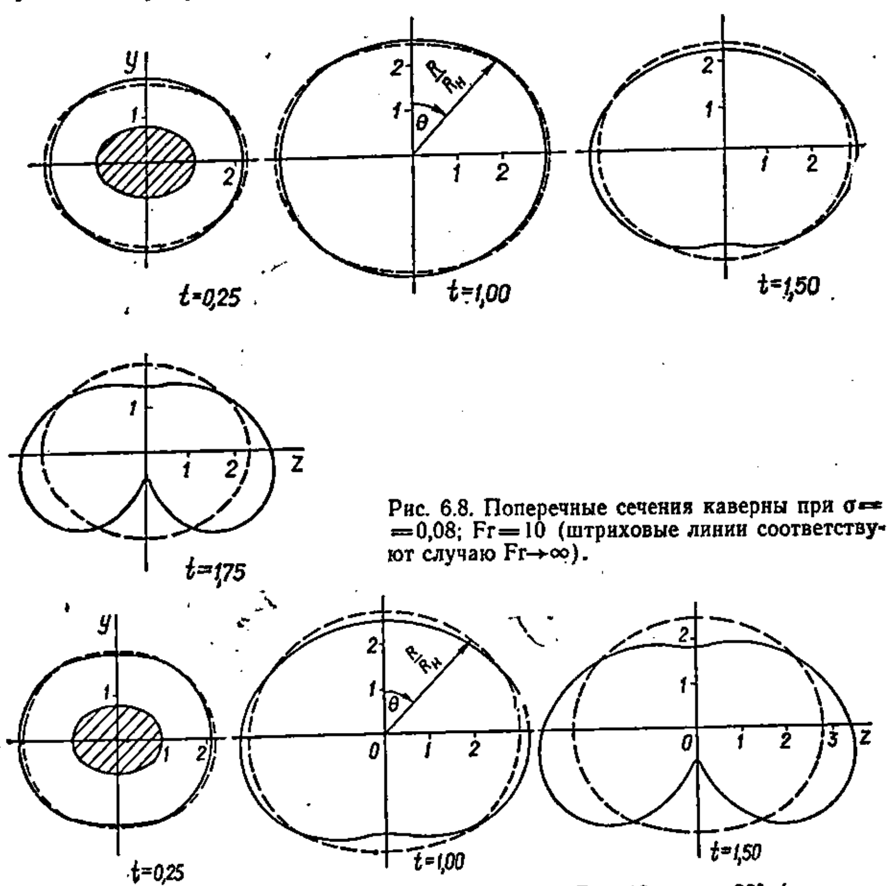


Рис. 6.8. Поперечные сечения каверны при $\sigma = 0{,}08$; $Fr = 10$ (штриховые линии соответствуют случаю $Fr \to \infty$).

Рис. 6.9. Поперечные сечения каверны при $\sigma = 0{,}08$; $Fr = 10$; $\alpha = -30°$ (штриховые линии соответствуют $Fr \to \infty$).

(2.39). На всех рисунках проекции наклоненного кавитатора на вертикальную плоскость yoz заштрихованы.

На рис. 6.8, 6.9 даны поперечные сечения каверн при $\sigma = 0{,}08$ в весомой ($Fr = 10$, сплошные линии) и невесомой ($Fr \to \infty$, штриховые линии) жидкостях соответственно при $\alpha = 30°$ и $\alpha = -30°$. В невесомой жидкости деформация сечений заключается в их осесимметричном сжатии и некотором сплющивании по оси oy, вдоль которой действует гидродинамическая сила на кавитаторе. При этом определенная часть поверхности сплющивается сильнее, поскольку реакция окружающей жидкости, компенсирующая действие гидродинамической силы на кавитаторе, в основном сказывается при положительном угле атаки сверху (рис. 6.8) и снизу (рис. 6.9) каверны при отрицательном угле атаки. Это сплющивание достаточно четко видно в весомой жидкости в сечениях до миделя и в миделе ($t = 0{,}25$; 1,00). В конце каверны наблюдается характерная форма деформации сечений ($t = 1{,}50$; 1,75) каверны весомостью, хотя и несколько ослабленная при $\alpha > 0$ или усиленная при $\alpha < 0$ гидродинамической силой на кавитаторе. Так, в сечении $t = 1{,}75$ при $\alpha = -30°$ каверна уже разруши-

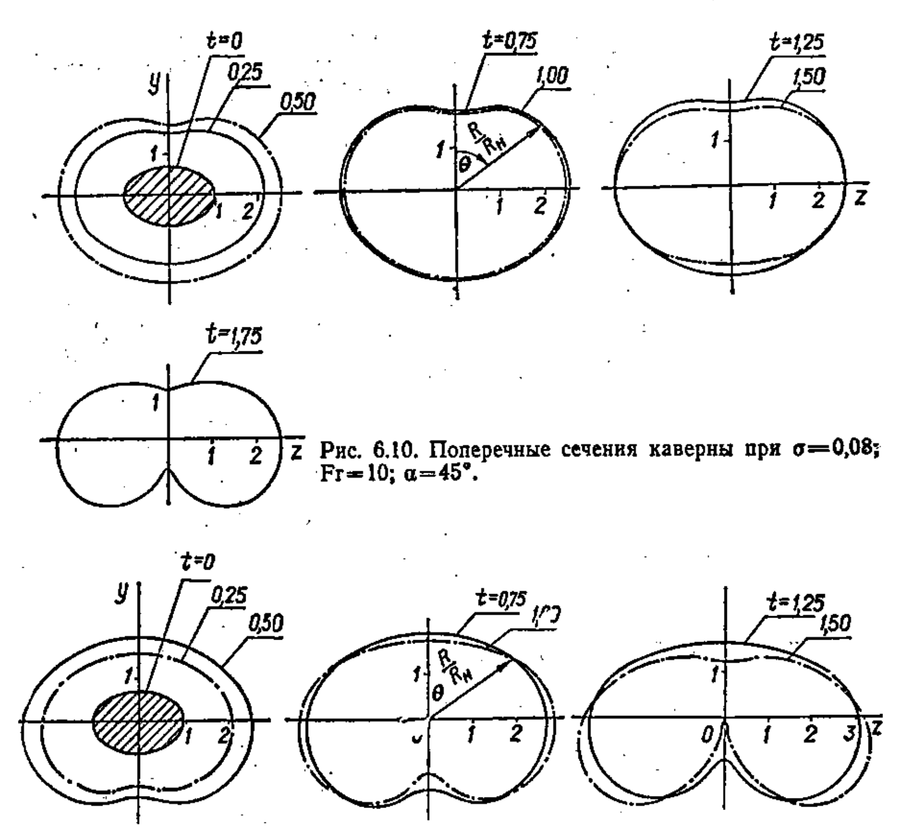


Рис. 6.10. Поперечные сечения каверны при $\sigma = 0{,}08$; $Fr = 10$; $\alpha = 45°$.

Рис. 6.11. Поперечные сечения каверны при $\sigma = 0{,}08$; $Fr = 10$; $\alpha = -45°$.

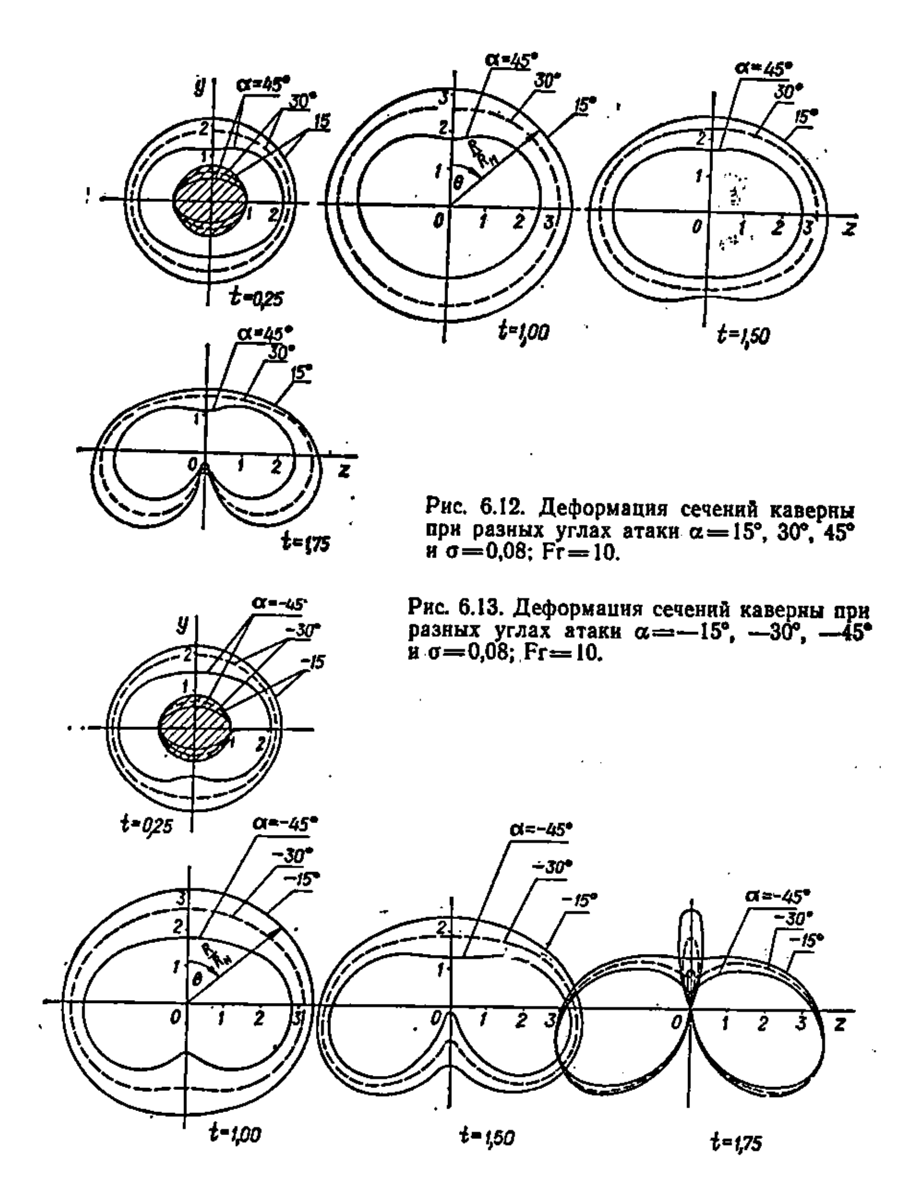


Рис. 6.12. Деформация сечений каверны при разных углах атаки $\alpha=15°$, $30°$, $45°$ и $\sigma=0{,}08$; $\mathrm{Fr}=10$.

Рис. 6.13. Деформация сечений каверны при разных углах атаки $\alpha=-15°$, $-30°$, $-45°$ и $\sigma=0{,}08$; $\mathrm{Fr}=10$.

лась, чего не будет при $\alpha = 0$. А картины деформации сечений $t = 1{,}75$ при $\alpha = 30°$ (рис. 6.8) и $t = 1{,}50$ при $\alpha = -30°$ (рис. 6.9) очень сходные. Это произошло потому, что при отрицательном угле атаки действие весомости как бы увеличилось.

Деформацию сечений каверны в весомой жидкости ($\mathrm{Fr} = 10$) при довольно больших углах атаки $\alpha = 45°$ и $\alpha = -45°$ иллюстрируют рис. 6.10 и 6 11 соответственно. Большой угол наклона порождает и большую гидродинамическую силу, что увеличивает степень сжатия и

сплющивания каверны. В этом случае в верхней части каверны при положительном угле атаки (рис. 6.10) и в нижней части при отрицательном угле (рис. 6.11) появляется впадина, обращенная внутрь каверны. Этот вид деформации подобен действию весомости. Особенно заметна впадина в конце каверны ($t = 1{,}75$), где весомость стремится сплющить сечение каверны по вертикали, растянув ее по горизонтали. В конце каверны ($t = 1{,}75$) при $\alpha = 45°$ действие весомости несколько уменьшается из-за действия гидродинамической силы на кавитаторе (рис. 6.10). При $\alpha = -45°$, как видно из рис. 6.11, уже в сечении $t = 1{,}50$ действие реакции жидкости, вызванное гидродинамической силой, и весомости, направленных снизу, как бы суммируется и деформация существенно увеличивается.

Интересно проследить деформацию и сжатие сечений каверны при разных углах наклона $\alpha = \pm 15$; ± 30; $\pm 45°$ для кавитационного течения при $\sigma = 0{,}08$; $\mathrm{Fr} = 10$ (рис. 6.12, $\alpha > 0$, рис. 6.13, $\alpha < 0$). Три проекции наклоненного кавитатора на вертикальную плоскость yoz в зависимости от угла α, приведенные на рисунках, наглядно иллюстрируют уменьшение эффективной площади кавитатора при увеличении угла атаки α. Проекции кавитатора являются эллипсами с эксцентриситетами $e^2 = 0{,}07$; $0{,}25$; $0{,}50$ для соответствующих им углов $\alpha = 15$; 30; $45°$. Как известно из гл. 5, при малых величинах эксцентриситета эллипса ($e^2 < 0{,}5$) размеры каверны за эллиптическим кавитатором и эффективным ему круговым очень близки. Поэтому расчет каверн при $\alpha = 15$; $30°$ выполнялся так же, как за эффективным круговым кавитатором, а при $\alpha = \pm 45°$ в начальных условиях необходимо учитывать эллиптическую форму проекции кавитатора на вертикальную плоскость. Сечения $t = 0{,}25$ расположены вблизи кавитатора и их форма близка к эллиптической. При достаточно больших углах атаки ($\alpha = \pm 45°$) на каверне появляется впадина, обращенная внутрь каверны. При $\alpha = \pm 30°$ заметно только сплющивание каверны сечений. Это особенно хорошо видно в сечении $t = 0{,}25$, где влияние весомости еще несущественно, хотя развитие этой впадины можно проследить во всех приведенных сечениях. Сечения каверны по всей ее длине сжаты (в сравнении с каверной при $\alpha = 0$): вблизи кавитатора их радиусы приблизительно уменьшены в $\sqrt{\cos\alpha}$, а в средней части каверны — в $\cos\alpha$ раз. А поскольку $\sqrt{\cos 15°} = 0{,}983$ и $\cos 15° = 0{,}966$, то сжатие тут практически не проявляется и каверну при $\alpha = 15°$ можно считать такой же, как за круговым кавитатором при $\alpha = 0$.

Рассмотрим изменение основных диаметров сечений каверны — вертикального и горизонтального — по ее длине. На рис. 6.14 показано изменение размеров диаметров $D/D_н$ в кавитационных течениях при $\sigma = 0{,}08$; $\mathrm{Fr} = 10$; $\alpha = \pm 45°$ в весомой и при $\alpha = 45°$ в невесомой жидкостях. Если в невесомой жидкости каверна существует и при $t = 1{,}75$, то при $\alpha = -45°$ в весомой жидкости каверна разрушается уже в сечении $t \approx 1{,}60$, вертикальный диаметр равен нулю, а горизонтальный очень вырос. При $\alpha = 45°$ в невесомой жидкости сечения каверны имеют овальные очертания, отношения диаметров в сред-

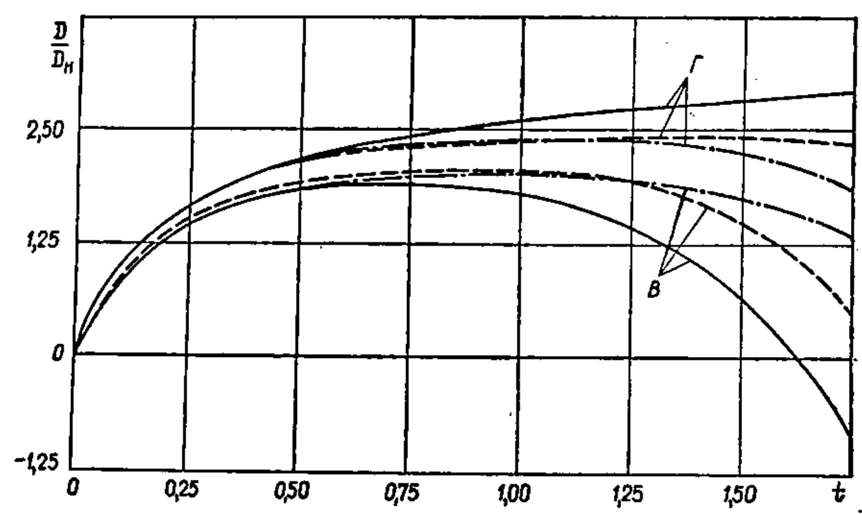


Рис. 6.14. Зависимость диаметров каверны от t при $\sigma=0{,}08$ в невесомой (штрихпунктирные линии) и весомой жидкостях (Fr=10) при $\alpha=+45°$ (штриховая линия); $\alpha=-45°$ (сплошная линия).

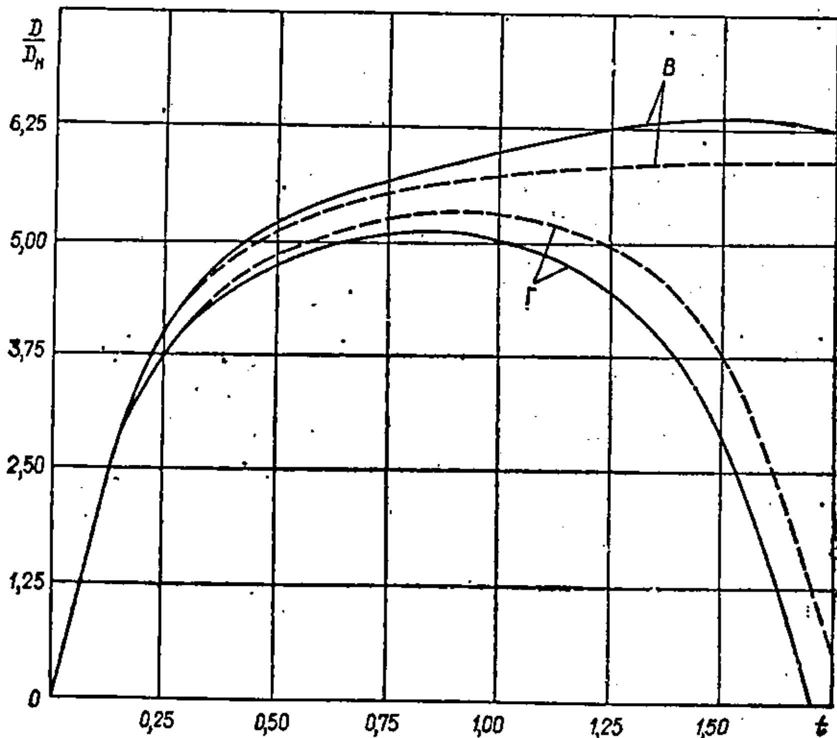


Рис. 6.15. Зависимость диаметров каверны от t при $\sigma=0{,}02$; Fr=30; $\alpha=+30°$ (штриховая линия); $\alpha=-30°$ (сплошная линия).

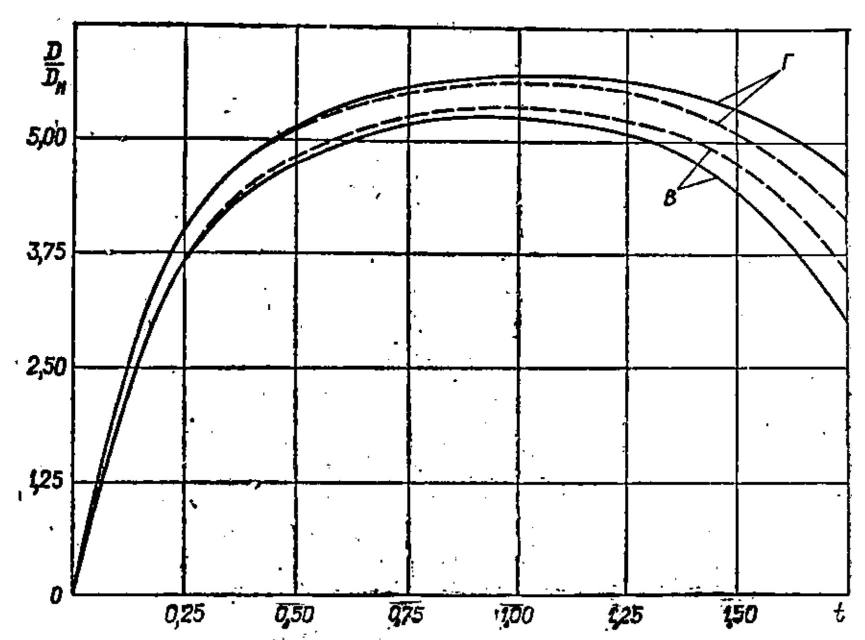


Рис. 6.16. Зависимость диаметров каверны от t при $\sigma=0{,}02$; Fr=100; $\alpha=+30°$ (штриховая линия); $\alpha=-30°$ (сплошная линия).

ней части каверны почти не меняется. Сечения каверны вблизи кавитатора при углах $\alpha = \pm 30°$ близки к круговым, что хорошо иллюстрируют рис. 6.15 и 6.16, построенные при $\sigma = 0{,}02$; $\alpha = \pm 30°$ соответственно при Fr = 30 и Fr = 100. Поскольку уровень возмущений от весомости при $\sigma = 0{,}02$; Fr = 30 велик, то в конце каверна разрушается. Как видно из рис. 6.14, 6.15, горизонтальный диаметр во всех случаях будет больше вертикального, который уменьшается как из-за действия весомости на каверну, так и из-за реакции жидкости на действие гидродинамической силы на кавитаторе. Это не зависит от того, стремятся ли эти силы деформировать (сплющить) сечения каверны обе снизу или с разных сторон (снизу и сверху).

Здесь приводились расчеты и рисунки при углах наклона $\alpha = \pm 45°$, хотя при таких значениях угла α предлагаемая теория скорее дает верные качественные результаты, чем количественные, поскольку деформации могут быть большими.

§ 3. КАВЕРНЫ ЗА ПРОИЗВОЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННЫМИ КАВИТАТОРАМИ

Рассмотрим кавитационное течение, образовавшееся за круговым кавитатором, плоскость срыва струй которого произвольно ориентирована относительно скорости невозмущенного движения V_0^*. Тогда можно говорить, что кавитатор будет иметь углы атаки α, рыскания β и крена γ. Поместим начало декартовой системы координат в центр

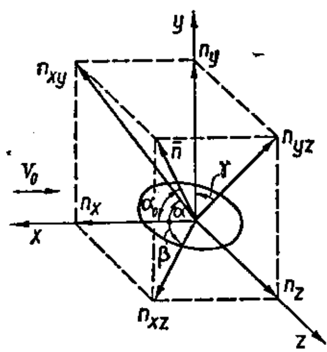


Рис. 6.17. Система координат.

диска и определим эти углы (рис. 6.17). Не умаляя общности, можно предположить, что скорость $\overline{V}_0^*$ направлена вдоль оси ox.

Спроектируем вектор нормали $\bar{n}$ к плоскости диска на координатные оси ($\bar{n}_x$, $\bar{n}_y$, $\bar{n}_z$) и на координатные плоскости ($\bar{n}_{xy}$, $\bar{n}_{xz}$, $\bar{n}_{yz}$). Угол атаки α — это угол между вектором скорости $\overline{V}^*$, и проекцией нормали $\bar{n}_{xy}$ на вертикальную меридиональную плоскость xoy. Угол наклона кавитатора α_0 — это угол между вектором скорости $\overline{V}_0^*$ и вектором нормали $\bar{n}$ к кавитатору. Угол крена γ — это угол между вертикальной осью oy и проекцией нормали $\bar{n}_{yz}$ на плоскость yoz. Угол рыскания β — это угол между вектором скорости $\overline{V}_0$ и проекцией вектора нормали $\bar{n}_{xz}$ на плоскость xoz. Между этими углами существует связь, которую можно найти по рис. 6.17.

Если записать соотношения

$$\bar{n}_{yz} = \bar{n}\sin\alpha_0, \quad \bar{n}_x = \bar{n}\cos\alpha_0,$$

$$\bar{n}_y = \bar{n}_{yz}\cos\gamma = \bar{n}\sin\alpha_0\cos\gamma, \quad \bar{n}_y = \bar{n}_{xy}\sin\alpha,$$

то можно получить зависимость между углами α, α_0, γ:

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha_0\cos\gamma. \tag{6.27}$$

Рассмотрим еще зависимости

$$\bar{n}_z = \bar{n}_{yz}\sin\gamma = \bar{n}\sin\alpha_0\sin\gamma,$$

$$\bar{n}_{xz} = \frac{\bar{n}_z}{\sin\beta} = \frac{\bar{n}\sin\alpha_0\sin\gamma}{\sin\beta}, \quad \bar{n}_{xz} = \frac{\bar{n}_x}{\cos\beta} = \frac{\bar{n}\cos\alpha_0}{\cos\beta}.$$

Отсюда получим соотношение между углами β, α_0 и γ:

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha_0\sin\gamma. \tag{6.28}$$

Исключая $\operatorname{tg}\alpha_0$, имеем

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma. \tag{6.29}$$

Из этого соотношения видно, что три угла α, β, γ не являются независимыми. Только два угла можно задавать произвольно, а третий будет определяться из соотношения (6.29). Например, можно задать произвольно попарно углы α и γ; α и β; γ и β.

При наличии угла атаки (угла наклона диска в вертикальной плоскости) и угла рыскания (угла наклона диска в горизонтальной плоскости) на кавитатор действует как подъемная сила, вызывающая искривление каверны ξ_1 в вертикальной плоскости, так и боковая гидродинамическая сила, вызывающая искривление каверны η_1 в горизонтальной плоскости. Суммарная гидродинамическая сила, действующая на кавитатор, будет иметь составляющие вдоль осей oy и oz.

Несимметричная деформация тонких каверн под действием весомости и гидродинамической силы на кавитаторе при малых углах наклона кавитатора к скорости невозмущенного потока рассматривалась в работах [15, 18, 124]. В статье [128] получено решение, которое можно распространить на несколько большие углы наклона. В качестве невозмущенной каверны используется осесимметричная каверна, возникающая за эффективным кавитатором, равновеликим проекции заданного кавитатора на вертикальную плоскость, перпендикулярную к скорости потока.

Возмущения формы каверны в несимметричном случае определяются как решения нелинейной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{1}{nR_0}\frac{d}{dt}(R_0^2\dot{\xi}_n) - \frac{n-1}{n}\ddot{R}_0\xi_n + \dot{\xi}_1(\dot{\xi}_{n-1} - \dot{\xi}_{n+1}) - \dot{\eta}_1(\dot{\eta}_{n-1} + \dot{\eta}_{n+1}) -$$
$$- \dot{\xi}_2\dot{\xi}_{n+2} - \dot{\eta}_2\dot{\eta}_{n+2} - U_n - \Delta P_n = 0, \tag{6.30}$$
$$\frac{1}{nR_0}\frac{d}{dt}(R_0^2\dot{\eta}_n) - \frac{n-1}{n}\ddot{R}_0\eta_n + \dot{\xi}_1(\dot{\eta}_{n-1} - \dot{\eta}_{n+1}) + \dot{\eta}_1(\dot{\xi}_{n-1} + \dot{\xi}_{n+1}) -$$
$$- \dot{\xi}_2\dot{\eta}_{n+2} + \dot{\eta}_2\dot{\xi}_{n+2} - \widetilde{U}_n - \Delta\widetilde{P}_n = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Уравнение радиусов $R(t, \theta, \alpha_0, \gamma)$ поперечных сечений возмущенной каверны можно представить в виде

$$R(t, \theta, \alpha_0, \gamma) = R_0(t) + \xi_0 + \xi(t, \theta, \alpha_0, \gamma),$$
$$\xi(t, \theta, \alpha_0, \gamma) = \sum_{n=2}^{\infty}[\xi_n(t, \alpha_0, \gamma)\cos n\theta + \eta_n(t, \alpha_0, \gamma)\sin n\theta], \tag{6.31}$$

где ξ_n и η_n определяются как решение системы уравнений (6.30).

Систему (6.30) необходимо дополнить начальными условиями. Кроме того, надо выбрать выражения для радиуса $R_0(t)$ осесимметричной каверны и осесимметричной деформации ξ_0, если на кавитатор действует гидродинамическая сила, создаваемая углами наклона α_0 и крена γ на кавитаторе. Для этого используем теорему импульсов.

Применив теорему импульсов к контрольной поверхности, состоящей из двух перпендикулярных к потоку плоскостей, из которых одна (Σ_1) отнесена в бесконечность перед кавитатором, а вторая (Σ_2) пересекает каверну, и цилиндрической поверхности Σ_3, аналогично работе [79] получим

$$W_x^* \approx kS^*(t)(P_0^* - P_к^*) + T^*,$$
$$W_y^* \approx -\rho^* S^*(t)V_0^* v_y^*, \tag{6.32}$$
$$W_z^* \approx -\rho^* S^*(t)V_0^* v_z^*.$$

Здесь v_y^*, v_z^* — абсолютные скорости вертикального и горизонтального скосов каверны в сечении x, где площадь сечения — $S^*(t)$; $T^* = \sum_{n=1}^{\infty} T_n^*$ — кинетическая энергия жидкости в кольцевом слое каверны единичной толщины, параллельном плоскости Σ_2, вызванная поперечным движением (T_1^*) и деформациями (T_n^*) поперечного сечения каверны; P_0^* и $P_к^*$ — давление в невозмущенной жидкости и в каверне; W_x^*, W_y^*, W_z^* — составляющие гидродинамической силы; $k=k(\sigma)\approx 0{,}96$.

Если диск радиуса $R_н^*$, сила сопротивления которого $W_0^* = c_{x0}(1+\sigma)\pi R_н^{*2}\rho^* V_0^{*2}/2$, где $c_{x0}\approx 0{,}82$, наклонен на угол α_0 к скорости V_0^*, то составляющие гидродинамической силы на осях ox, oy, oz имеют вид

$$W_x^* = W_n^* \cos\alpha_0, \quad W_y^* = W_n^* \sin\alpha_0, \quad W_z^* = 0.$$

Повернем кавитатор с углом наклона α_0 на угол крена γ вокруг оси ox или, что то же самое, вокруг вектора невозмущенной скорости V_0^*. Тогда, если учесть, что $W_n^* = W_0^* \cos\alpha_0$, проекции силы давления на осях oy и oz запишутся в виде

$$W_y^* = W_0^* \cos\alpha_0 \sin\alpha_0 \cos\gamma, \quad W_z^* = W_0^* \cos\alpha_0 \sin\alpha_0 \sin\gamma. \tag{6.33}$$

Из соотношений (6.32) и (6.33) определим скорости вертикального и горизонтального искривлений оси каверны в произвольный момент времени:

$$\dot{\xi}_1 = \frac{v_y^*}{V_0^*} = -\frac{W_y^*}{\rho^* S^*(t) V_0^{*2}}, \quad \dot{\eta}_1 = \frac{v_z^*}{V_0^*} = -\frac{W_z^*}{\rho^* S^*(t) V_0^{*2}}, \tag{6.34}$$

где $S^*(t)$ — площадь произвольного сечения каверны, которое в общем случае не является круговым.

Из этих уравнений можно найти начальные значения производных $\dot{\xi}_1(0)$ и $\dot{\eta}_1(0)$. Для этого достаточно определить $R(t)$ при $t=0$. Как известно, проекция сечения кавитатора на вертикальную плоскость в начальный момент времени имеет площадь

$$S(0) = S_н \cos\alpha_0 = \pi R_н^2 \cos\alpha_0 = \pi R^2(0),$$
$$R(0) = R_н \sqrt{\cos\alpha_0}.$$

Используя это выражение для $R(0)$, из соотношений (6.34) получаем скорости скоса каверны в начальный момент:

$$\dot{\xi}_1(0) = -\frac{c_{x0}(1+\sigma)}{2} \sin\alpha_0 \cos\gamma,$$
$$\dot{\eta}_1(0) = -\frac{c_{x0}(1+\sigma)}{2} \sin\alpha_0 \sin\gamma. \tag{6.35}$$

Формулы (6.35) являются начальными условиями для скоростей де-

формаций при решении системы нелинейных дифференциальных уравнений при наличии углов α_0 и γ.

Если угол крена равен нулю, то из формул (6.35) получаются выражения для начальных условий при наличии только угла наклона кавитатора

$$\dot{\xi}_1(0) = -\frac{c_{x0}(1+\sigma)}{2} \sin\alpha_0; \qquad \dot{\eta}_1(0) = 0,$$

которые уже были получены в § 1 данной главы.

В случае, когда на кавитатор действует только боковая сила ($\alpha_0 = \beta$, $\gamma = \pi/2$), начальные условия имеют вид

$$\dot{\xi}_1(0) = 0,$$
$$\dot{\eta}_1(0) = -\frac{c_{x0}(1+\sigma)}{2} \sin\alpha_0.$$

Рассмотрим первое уравнение (6.32). Кинетическая энергия T^* при наличии скоса каверны не равна нулю даже в миделевом сечении и определяется движением сечений каверны вдоль осей oy и oz и малыми деформациями формы сечений. Удельные импульсы $\rho^* S^*(t) v_y^*$ и $\rho^* S^*(t) v_z^*$, сообщенные жидкости в направлении, обратном гидродинамическим силам W_y^* и W_z^*, остаются примерно постоянными вдоль каверны и ее следа [79, 80]. Поэтому и здесь можно приближенно считать и кинетическую энергию постоянной вдоль каверны и равной первому члену T_1^* ряда T^*, вычисленному вблизи кавитатора, где деформации высших порядков еще малы и ими можно пренебречь, а перемещение каверны как жесткого целого со скоростями v_y^* и v_z^* является основным. Вычислив импульсы в начальный момент времени и определив из (6.32) возмущенные скорости, получим выражение для кинетической энергии жидкого кольца каверны, только что сорвавшегося с кавитатора:

$$T^* \approx \rho^* S^*(0) \frac{v_y^{*2} + v_z^{*2}}{2} = \frac{W_y^{*2} + W_z^{*2}}{2\rho^* V_0^{*2} S^*(0)}.$$

Подставив значение кинетической энергии T^* в первое уравнение (6.32), записанное для миделевого сечения, получим

$$W_x^* = k S_k^* \left[\Delta P^* + \frac{W_y^{*2} + W_z^{*2}}{2k\rho^* V_0^{*2} S^*(0) S_к^*}\right] = k S_k^* \Delta\tilde{P}^*. \tag{6.36}$$

Можно трактовать $\Delta\tilde{P}^*$ как разность давлений в некотором фиктивном потоке, увеличенную в сравнении с исследуемым потоком. Подставив в выражение (6.36) значения W_x^*, W_y^*, W_z^*, W_0^*, придем к следующему соотношению для площади миделевого сечения каверны в этом фиктивном потоке:

$$\frac{S_к}{S_н \cos^3\alpha_0} = \frac{c_x}{k\sigma_1}, \tag{6.37}$$

число кавитации которого определяется формулой

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{1 - \frac{c_x}{4} \frac{\sin^2 \alpha_0}{\cos \alpha_0}} . \qquad (6.38)$$

При малых углах наклона α_0 «начальное» сечение каверны без большой погрешности можно отождествить с сечением срыва площадью $S_н$. Тогда формулы для определения площади миделевого сечения и числа кавитации σ_1 совпадают с выражениями, полученными впервые Г. В. Логвиновичем [79, 80].

Из этих выражений можно сделать следующие выводы. Во-первых, площадь миделевого сечения каверны зависит только от угла наклона α_0 и не зависит от угла крена γ. Во-вторых, она будет такой же, как площадь миделевого сечения каверны с кавитатором без наклона с коэффициентом сопротивления $c_x(\sigma)$, но с площадью сечения срыва $S_н \cos^2 \alpha_0$ в фиктивном потоке с числом кавитации $\sigma_1(\alpha_0)$.

При круговом сечении срыва струй проекция кавитатора при $t=0$ на плоскость yoz является эллипсом, повернутым на угол γ, с полуосями $R_н \cos \alpha_0$ и $R_н$ с эксцентриситетом, равным $e = \sin \alpha_0$, и площадью $S_{эф} = S(0) = \pi R_н^2 \cos \alpha_0$.

Начальные условия для возмущений при расчете каверн за этим эффективным эллиптическим кавитатором, расположенным под углом крена γ, имеют вид [127]

$$\begin{aligned} &\xi_1(0) = 0, && \eta_1(0) = 0, \\ &\xi_2(0) = e^2 \tilde{\xi}_2 \cos 2\gamma, && \eta_2(0) = e^2 \tilde{\eta}_2 \sin 2\gamma, \\ &\xi_3(0) = 0, && \eta_3(0) = 0, \\ &\xi_4(0) = e^4 \tilde{\xi}_4 \cos 4\gamma, && \eta_4(0) = e^4 \tilde{\eta}_4 \sin 4\gamma. \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \qquad (6.39)$$

Здесь $\tilde{\xi}_{2n}$, $\tilde{\eta}_{2n}$ вычисляются по формуле

$$\tilde{\xi}_{2n} = \tilde{\eta}_{2n} = R_н \cos \alpha_0 \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(2k-1)!!\,(2k)!}{(2k)!!\,(k+n)!\,(k-n)!} \frac{e^{2(k-n)}}{2^{2k-1}} .$$

Следовательно, возмущения каверны ξ_n и η_n при наличии углов α_0 и γ на кавитаторе определяются решением системы уравнений (6.30) с начальными условиями для возмущений (6.39) и скоростей возмущений (6.35) при $\dot{\xi}_n(0) = \dot{\eta}_n(0) = 0$ $(n \geqslant 2)$. В формуле для R_0 должно быть использовано число кавитации $\sigma_1(\alpha_0)$.

Влияние угла крена γ имеет смысл рассматривать лишь при наличии поля сил тяжести или другой внешней причины, делающей форму каверны несимметричной.

Влияние осесимметричной деформации ξ_0 будем учитывать так же, как и в случае наличия только угла наклона (§ 1, гл. 6), в виде функции

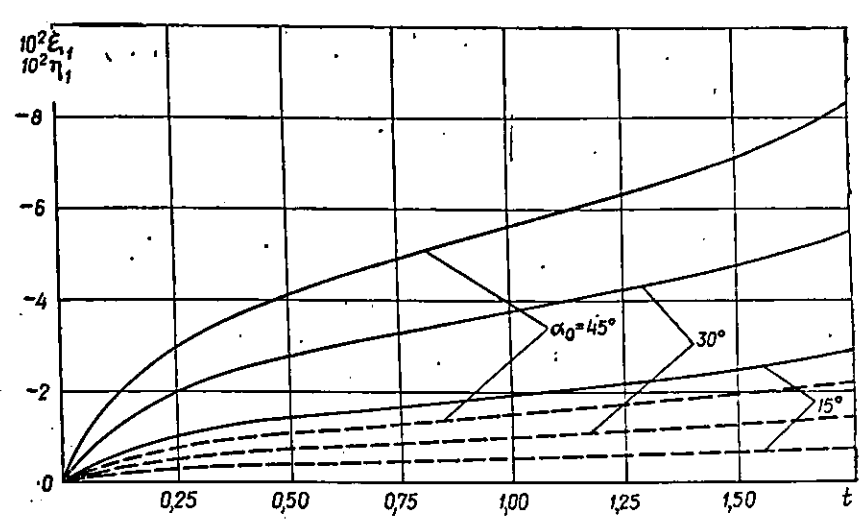


Рис. 6.18. Зависимость искривлений оси каверны в невесомой жидкости от угла наклона при $\sigma=0{,}08$; $\gamma=15°$.

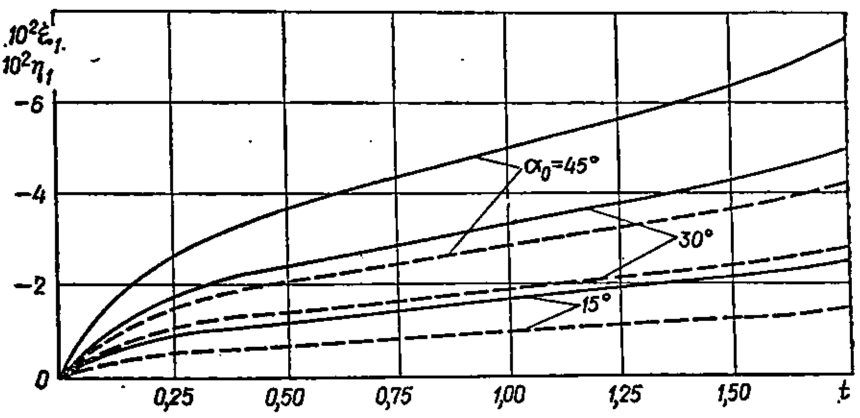


Рис. 6.19. Зависимость искривлений оси каверны в невесомой жидкости от угла наклона при $\alpha=0{,}08$; $\gamma=30°$.

$R_0(\alpha_0, t) = R_0(t) + \xi_0(\alpha_0, t)$. Кусочно-линейная аппроксимация в данном случае будет иметь вид:

$$R_0(\alpha_0, t) = R_к(\alpha_0)\, \mu(\alpha_0, t)\, f(t);$$

$$R_к(\alpha_0) = R_к \cos \alpha_0;$$

$$\mu(\alpha_0, t) = \frac{1}{\sqrt{\cos \alpha_0}} \begin{cases} 1 - t(1 - \sqrt{\cos \alpha_0}), & t \leqslant 1, \\ 1 - (2 - t)(1 - \sqrt{\cos \alpha_0}), & t > 1, \end{cases}$$

где $f(t)$ — известная функция [18, 80].

На рис. 6.18—6.23 приведены зависимости от углов наклона α_0 и крена γ вертикального (сплошные линии) и горизонтального (штрихо-

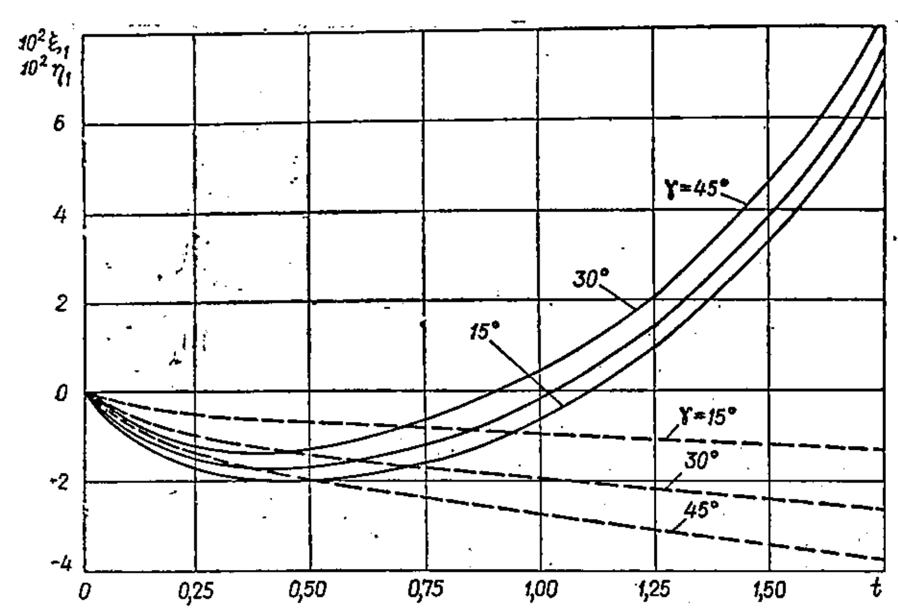


Рис. 6.20. Зависимость искривлений оси каверны от угла крена при $\sigma=0{,}08$; $Fr=10$; $\alpha_0=30°$.

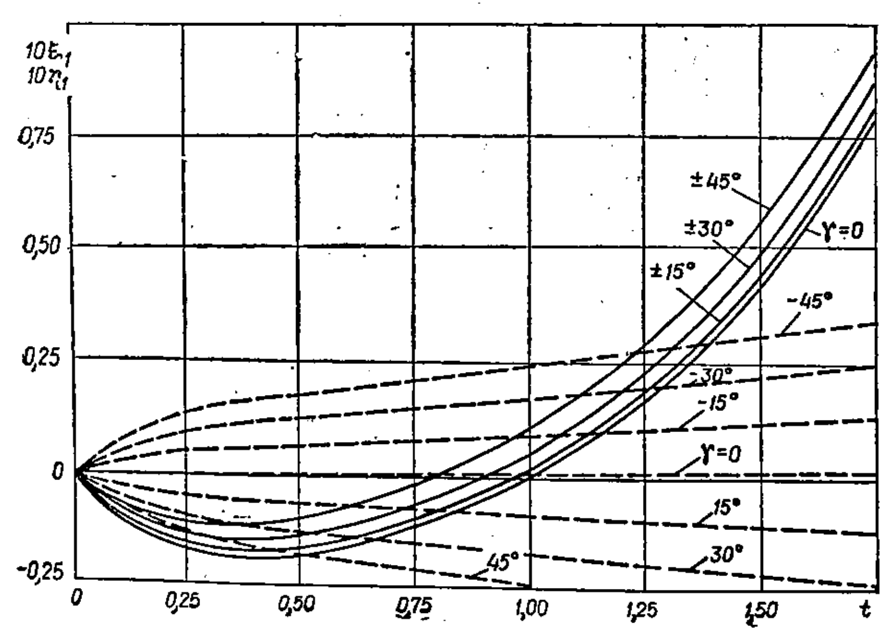


Рис. 6.21. Зависимость искривлений оси каверны от угла крена при $\sigma=0{,}08$; $Fr=10$; $\alpha_0=45°$.

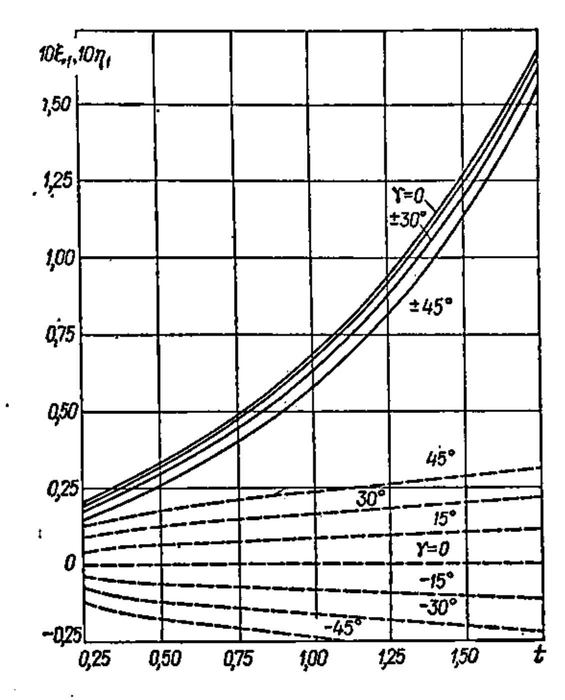
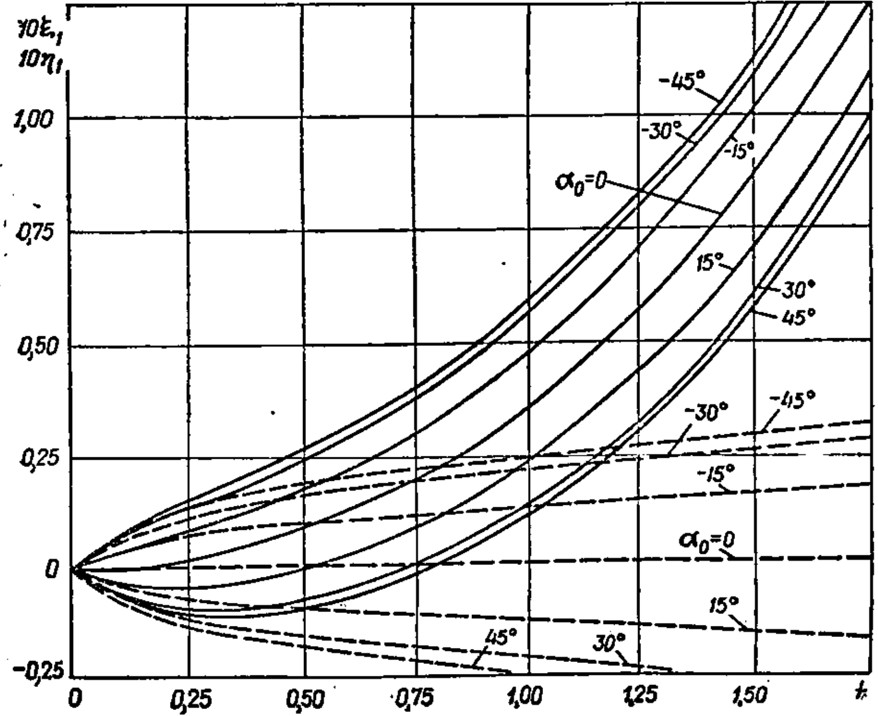


Рис. 6.22. Зависимость искривлений оси каверны от угла крена при $\sigma=0{,}08$; $Fr=10$; $\alpha_0=-45°$.

Рис. 6.23. Зависимость искривлений оси каверны от угла наклона при $\sigma=0{,}08$; $Fr=10$; $\gamma=45°$



вые линии) искривлений оси каверны. Сравнение рис. 6.18 и 6.19, построенных для случая невесомой жидкости ($Fr \to \infty$) при $\sigma = 0{,}08$ и переменном значении угла наклона α_0 для значений углов крена $\gamma = 15°$ и $\gamma = 30°$ соответственно, показывает, что с увеличением вдвое угла крена γ почти в два раза увеличивается величина горизонтального искривления оси каверны η_1, в то же время вертикальное искривление оси каверны ξ_1 меняется мало. А увеличение вдвое угла наклона α_0 меняет как горизонтальное, так и вертикальное искривление оси почти в два раза. Рис. 6.20—6.22 иллюстрируют характер изменения искривлений осей ξ_1 и η_1 в весомой жидкости $Fr = 10$, $\sigma = 0{,}08$ при изменении угла крена γ и постоянных значениях угла наклона $\alpha = 30$; 45; —45° соответственно. Из рисунков видно, что наличие угла крена γ может как увеличивать ($\alpha_0 > 0$), так и уменьшать ($\alpha_0 < 0$) вертикальное искривление оси каверны ξ_1, хотя и не очень сильно. Боковое искривление оси каверны η_1 сильно зависит от угла крена γ. С увеличением этого угла в два раза от 15 до 30° и от 30 до 45° горизонтальное искривление η_1 вырастает почти вдвое. Также влияет на изменение η_1 и изменение углов наклона α_0 (рис. 6.23). Такое действие несимметрии течения соответствует характеру взаимодействия гидродинамической силы на кавитаторе и весомости жидкости. Величина искривления оси, связанная с гидродинамической силой на кавитаторе, зависит в основном от соотношения α_0 и γ.

При постоянном угле наклона $\alpha_0 > 0$ величина гидродинамической силы W_y^* на кавитаторе будет убывать с ростом угла крена γ, что видно из первого соотношения (6.33), поскольку $\cos\gamma$ будет убывать. А это приведет к уменьшению реактивной («топящей») силы жидкости на каверну. Следовательно, немного возрастет величина вертикального искривления оси каверны ξ_1, так как к величине искривления оси ξ_1 (Fr), созданного весомостью, будет прибавляться меньшая отрицательная величина (при $\alpha_0 > 0$, $\xi_1(\alpha_0) < 0$), общее вертикальное искривление оси будет равно $\xi_1(\alpha_0, Fr) = \xi_1(Fr) - |\xi_1(\alpha_0)|$.

При отрицательных углах наклона ($\alpha_0 < 0$) наблюдается аналогичная картина, только действие сил будет противоположно направлено, а $\xi_1(\alpha_0) > 0$. С ростом угла крена γ будет убывать величина искривления оси каверны ξ_1, к величине искривления оси каверны ξ_1 (Fr), связанного с весомостью, будет прибавляться меньшая положительная величина и общее вертикальное искривление оси каверны будет уменьшаться: $\xi_1(\alpha_0, Fr) = \xi_1(Fr) + \xi_1(\alpha)$.

С ростом угла крена γ горизонтальное искривление оси η_1 будет расти, что видно из второго соотношения (6.33), поскольку $\sin\gamma$ будет возрастать. Боковое искривление оси η_1, как функция t, является почти линейной функцией, кроме четверти длины каверны у кавитатора. Чем меньше угол крена, тем функция $\eta_1(t)$ ближе к линейной.

Из приведенных рисунков видно, что вертикальное ξ_1 и горизонтальное η_1 искривления оси на четверти длины каверны возле кавитатора соразмеримы, а после миделя ξ_1 почти на порядок больше, чем η_1.

Рассмотрим форму поперечных сечений каверны в широком диапазоне изменения углов наклона $\pm 30° \leqslant \alpha_0 \pm 45°$ и крена $15° \leqslant \gamma \leqslant 45°$. На рис. 6.24—6.27 приводятся поперечные сечения каверны при

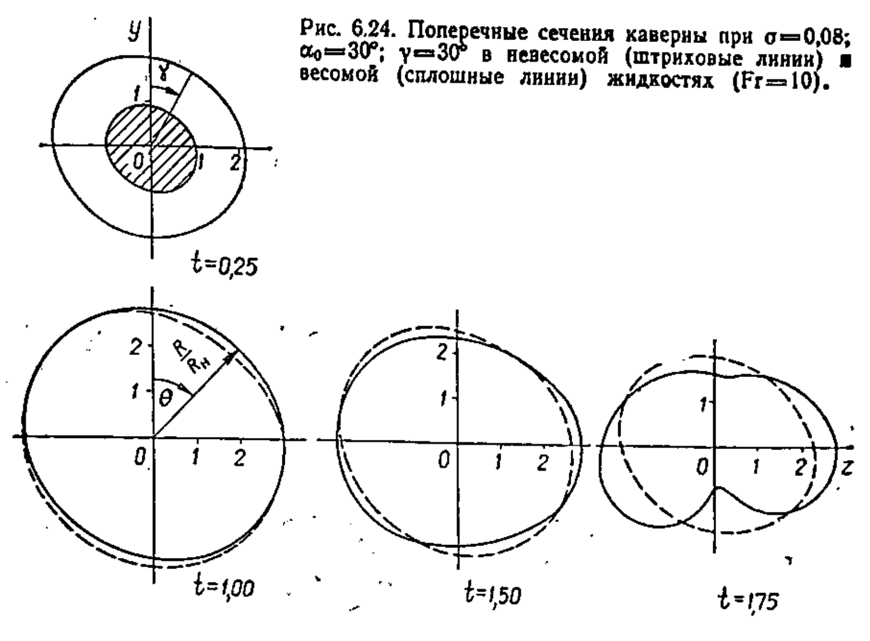


Рис. 6.24. Поперечные сечения каверны при $\sigma = 0{,}08$; $\alpha_0 = 30°$; $\gamma = 30°$ в невесомой (штриховые линии) и весомой (сплошные линии) жидкостях ($Fr = 10$).

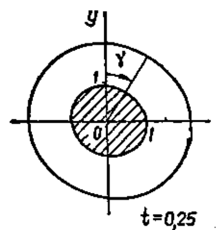
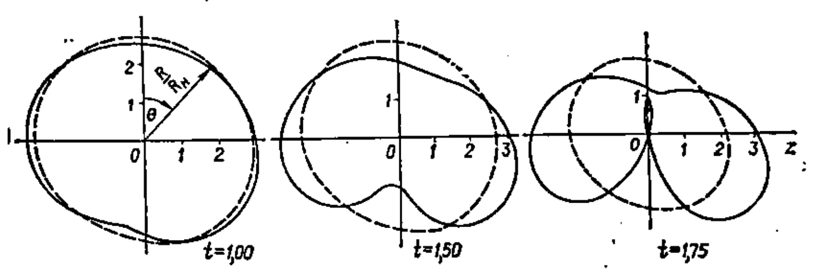


Рис. 6.25. Поперечные сечения каверны при $\sigma = 0{,}08$; $\alpha_0 = -30°$; $\gamma = 30°$ в невесомой (штриховые линии) и весомой (сплошные линии) жидкостях ($Fr = 10$).



$\sigma = 0{,}08$; $t = 0{,}25$; 1,00; 1,50; 1,75 в невесомой (штриховые линии) и весомой $Fr = 10$ (сплошные линии) жидкостях. В сечении $t = 0{,}25$ показана проекция кавитатора на вертикальную плоскость (заштрихована) и помечен угол крена γ. Из этих рисунков хорошо видно, что сечения в домидельной части каверны в весомой жидкости повернуты фактически на угол γ, как и в случае невесомой жидкости. Вблизи кавитатора, например при $t = 0{,}25$, сечения каверны имеют овальную форму, сходную с конфигурацией проекции кавитатора на верти-

кальную плоскость yoz. В невесомой жидкости ориентация сечений на угол γ от вертикали сохраняется по всей длине каверны. В весомой жидкости по мере удаления от кавитатора угол поворота поперечных сечений каверны уменьшается и даже может изменить направление на противоположное. Вблизи кавитатора, как видно из рисунков, форма поперечных сечений симметрична относительно плоскости действия гидродинамической силы на кавитаторе, но в послемидельной части каверны в весомой жидкости такой симметрии уже не наблюдается (t = 1,50; 1,75).

При обтекании кавитатора с положительным углом наклона в невесомой жидкости подъемная сила W_y^* направлена вверх. Считая

Рис. 6.26. Поперечные сечения каверны при σ=0,08; α_0=45°; γ=30° в невесомой (штриховые линии) и весомой (сплошные линии) жидкостях (Fr=10).

Рис. 6.27. Поперечные сечения каверны при σ=0,08; α_0=—45°; γ=30° в невесомой (штриховые линии) и весомой (сплошные линии) жидкостях (Fr=10).

кавитатор и каверну некоторым профилем, замечаем, что скорости на свободных линиях тока, сошедших с кавитатора, будут различны для верхней и нижней границ каверны, поскольку длины этих линий различны. Скорость на верхней границе каверны в данном случае будет больше, чем на нижней. Это приводит к появлению циркуляции около каверны в вертикальной меридиональной плоскости и возникновению гидродинамической силы, направленной вниз. Следовательно, если на кавитаторе имеется подъемная сила, то на каверну будет действовать некая «топящая» гидродинамическая сила. К тому же, если кавитатор повернут на угол крена γ, то действие «топящей» силы будет также отклоняться от вертикали на этот угол γ, что хорошо видно из рис. 6.24, 6.26 (штриховые линии).

При обтекании кавитатора с отрицательным углом наклона в невесомой жидкости подъемная сила W_y^* будет направлена вниз. Как и при положительных углах наклона, в данном случае также возникнет циркуляция, но она уже будет иметь противоположное направление. Она создает гидродинамическую силу, направленную вверх. При наличии угла крена γ направление действия этой силы также отклонено от вертикали на угол γ (рис. 6.25, 6.27 — штриховые линии).

При достаточно больших углах крена γ в весомой жидкости можно наблюдать явление переориентации сечений каверны, возникающее как результат взаимодействия весомости и гидродинамической силы, вызванной наличием угла наклона кавитатора. Весомость жидкости создает циркуляцию около каверны в вертикальной меридиональной плоскости, из-за чего возникает сила Жуковского, которая в данном случае направлена вниз. Эта гидродинамическая сила, так называемая «топящая», уравновешивается архимедовой силой. При движении наклонного кавитатора возникает также гидродинамическая сила, но направленная по-разному. Это зависит, как было показано выше, от ориентации углов наклона и крена.

В весомой жидкости действие вихревой системы, порожденное весомостью, вначале каверны мало и довольно сильно возрастает к концу каверны. Действие на каверну вихревой системы, создаваемой наличием угла наклона кавитатора, сперва растет в передней части каверны, а потом на протяжении каверны почти не меняется. При положительном угле наклона и угле крена γ на кавитаторе направление действия гидродинамической силы «вниз» повернуто на угол γ от вертикальной оси oy, а весомость создает гидродинамическую силу, направленную вверх. Когда действие вихревой системы, связанной с весомостью, в конце каверны значительно больше, чем действие вихревой системы, порожденной подъемной силой на кавитаторе ($\alpha_0 > 0$), то вихри, порожденные весомостью, стремятся повернуть сечения каверны в симметричное положение относительно вертикальной плоскости yoz. Более интенсивная в конце каверны вихревая система, вызванная весомостью, приводит не только к повороту сечений каверны на угол крена, но даже в некоторых случаях и к дальнейшему повороту сечений каверны от вертикали в противоположную сторону, чему также способствует свойство инерционности жидкого кольца каверны (рис. 6.24, 6.26 — сплошные линии).

При отрицательном угле наклона и угле крена γ на кавитаторе направление действия гидродинамической силы «вверх» повернуто на угол γ от вертикальной оси oy, а весомость приводит к созданию гидродинамической силы, направленной вверх. Поэтому наличие отрицательного угла наклона усиливает действие весомости и, следовательно, деформацию сечений каверны (рис. 6.25, 6.27 — сплошные линии). Действие двух вихревых систем подобно, уменьшение поворота сечений происходит медленно, не исчезая на всей длине каверны.

Интересно проследить изменение формы поперечных сечений каверны при росте угла крена от 15 до 45° при $\alpha_0 = \pm 30°$; Fr = 10; $\sigma = 0{,}08$. Происходит не только поворот сечений, но и деформация их формы, что хорошо видно на рис. 6.28 и 6.29.

На рис. 6.30 представлены поперечные сечения каверны $t = 0{,}25$; 1,00; 1,50; 1,75 при $\sigma = 0{,}08$; Fr = 10; $\alpha = 45°$ и $\gamma = 30°$, рассчитанные за проекцией эллиптической конфигурации кругового кавитатора на вертикальную плоскость yoz (штриховые линии) и за равным ей по площади круговым кавитатором (сплошные линии). Поперечные сечения каверны за этими двумя кавитаторами близки, особенно в средней части каверны. Различия в форме этих сечений особенно заметны в начале и в конце каверны ($t = 0{,}25$; 1,75), и они невелики. На рис. 6.30 штрихпунктирными линиями показаны для сравнения сечения осесимметричной каверны при числе кавитации $\sigma = 0{,}08$. Хорошо видно, как сильно уменьшают и деформируют каверну весомость и гидродинамическая сила, вызванная наличием углов наклона α_0 и крена γ на кавитаторе.

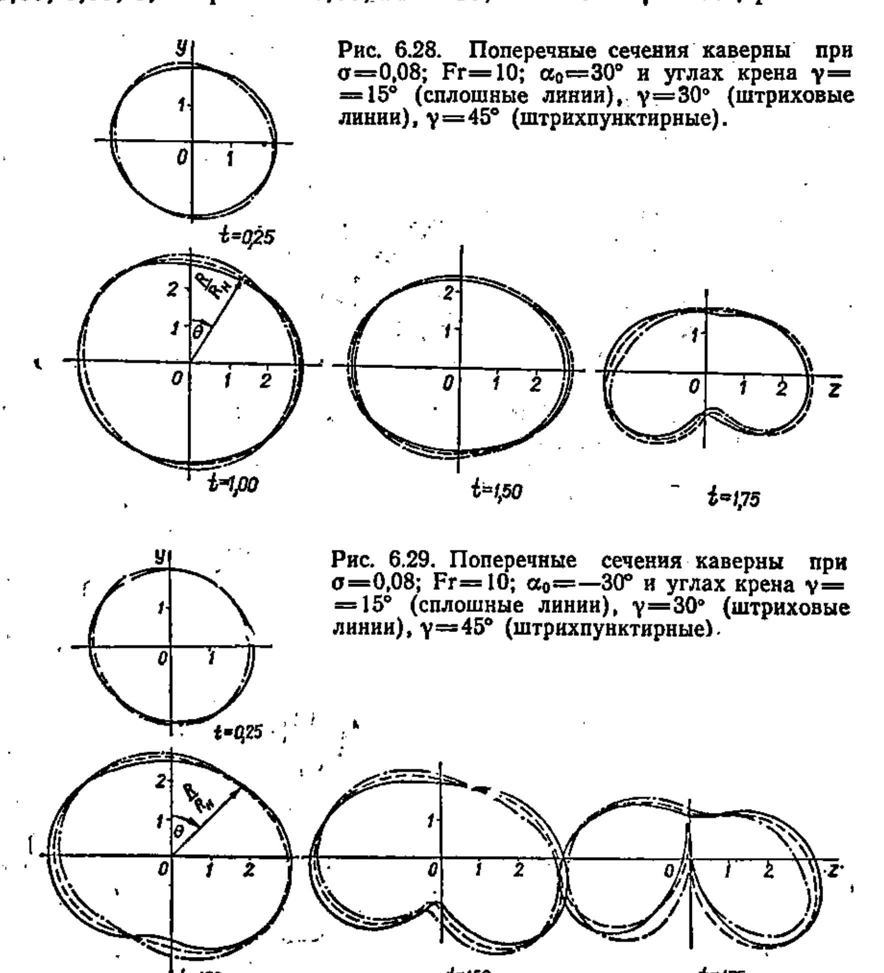


Рис. 6.28. Поперечные сечения каверны при $\sigma = 0{,}08$; Fr=10; $\alpha_0 = 30°$ и углах крена $\gamma = 15°$ (сплошные линии), $\gamma = 30°$ (штриховые линии), $\gamma = 45°$ (штрихпунктирные).

Рис. 6.29. Поперечные сечения каверны при $\sigma = 0{,}08$; Fr=10; $\alpha_0 = -30°$ и углах крена $\gamma = 15°$ (сплошные линии), $\gamma = 30°$ (штриховые линии), $\gamma = 45°$ (штрихпунктирные).

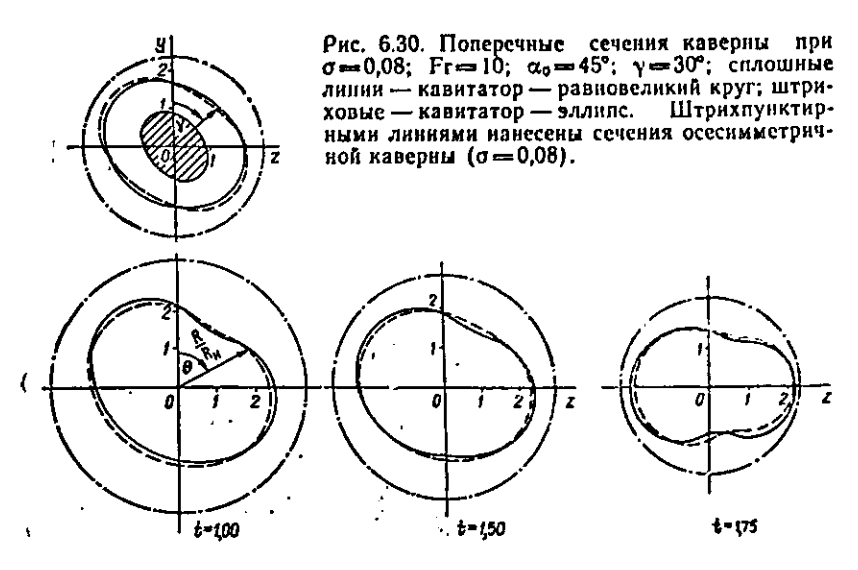


Рис. 6.30. Поперечные сечения каверны при $\sigma = 0{,}08$; Fr=10; $\alpha_0 = 45°$; $\gamma = 30°$; сплошные линии — кавитатор — равновеликий круг; штриховые — кавитатор — эллипс. Штрихпунктирными линиями нанесены сечения осесимметричной каверны ($\sigma = 0{,}08$).

§ 4. КАВЕРНЫ ЗА ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ПРОИЗВОЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННЫМИ В ПРОСТРАНСТВЕ КАВИТАТОРАМИ

Произвольная ориентация кавитирующего насадка в потоке задается углом наклона α_0 плоскости кавитатора к невозмущенной скорости V_0^* и углом крена γ. Течение за таким кавитатором будет несимметричным. Деформации радиусов поперечных сечений каверны при этом определяются полным рядом Фурье

$$R(t, \theta) = R_0(t) + \sum_{n=0}^{\infty} [\xi_n(t)\cos n\theta + \eta_n(t)\sin n\theta],$$

коэффициенты которого являются решением системы нелинейных уравнений (6.30). Начальные значения производных в данном случае имеют вид (6.35)

$$\dot{\xi}_1(0) = -\frac{c_{x0}(1+\sigma)}{2}\sin\alpha_0\cos\gamma,$$

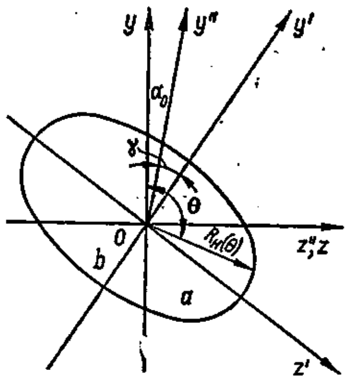


Рис. 6.31. Произвольно ориентированный эллиптический кавитатор.

$$\dot\eta_1(0) = -\frac{c_{x0}(1+\sigma)}{2}\sin\alpha_0 \sin\gamma, \tag{6.40}$$

$$\dot\xi_n(0) = \dot\eta_n(0) = 0 \qquad (n \geqslant 2).$$

Начальные значения функций $\xi_n(0)$ и $\eta_n(0)$ определяются коэффициентами разложения функций полярного радиуса, которое в общем случае следующее:

$$R_н(0) = R_{н0} + \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_{n0}\cos n\theta + \eta_{n0}\sin n\theta). \tag{6.41}$$

Начальные условия выполняются при $t = 0$ на плоскости $x = 0$ (координатная плоскость yoz), перпендикулярной к скорости невозмущенного потока, а ориентация кавитатора задается углами α_0 и γ. Полагаем, что каверна в этом случае образуется за кавитатором с сечением срыва, равным проекции сечения срыва кавитатора радиусом $R_н$ на вертикальную плоскость $x = 0$. Спроектируем плоскость кавитатора на вертикальную плоскость yoz.

Пусть в декартовой системе координат $y'oz'$ уравнение контура срыва эллиптического кавитатора имеет канонический вид:

$$\frac{z'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1,$$

где $2a$ и $2b$ — горизонтальная и вертикальная оси эллипса соответственно; $e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$ — его эксцентриситет. Плоскость $y'oz'$ имеет угол α_0 с плоскостью yoz, а ось координат oy' составляет угол γ с осью oy. Определим вид уравнения этого эллипса в системе координат yoz (рис. 6.31). Введем вспомогательную систему координат $y''oz''$, оси которой повернуты на угол γ относительно системы координат $y'oz'$. Выполнив преобразование координат

$$z' = z''\cos\gamma - y''\sin\gamma,$$

$$y' = z''\sin\gamma + y''\cos\gamma$$

и использовав параметрическое уравнение эллипса

$$z = R_н(\theta)\sin\theta,$$

$$y = R_н(\theta)\cos\theta,$$

запишем уравнение радиуса эллипса на плоскости $y''oz''$ в полярных координатах в следующем виде:

$$R_н(\theta) = \frac{b}{\sqrt{1 - e^2\sin^2(\theta-\gamma)}}$$

Можно преобразовать это выражение к виду, сходному с каноническим, если зависимость координат от параметра задавать формулами

$$\tilde z'' = R_н(\theta)\sin(\theta-\gamma),$$

$$\tilde y'' = R_н(\theta)\cos(\theta-\gamma).$$

Тогда уравнение эллипса в плоскости $y''oz''$ можно представить в виде

$$\frac{\tilde z''^2}{a^2} + \frac{\tilde y''^2}{b^2} = 1.$$

Выполнив еще одно преобразование координат $z = z''$, $y = y''\cos\alpha_0$, получим уравнение полярного радиуса эллипса на плоскости yoz

$$R_н(\theta) = \frac{b\cos\alpha_0}{\sqrt{1-\tilde e^2\sin^2(\theta-\gamma)}} = \frac{\tilde b}{\sqrt{1-\tilde e^2\sin^2(\theta-\gamma)}}, \tag{6.42}$$

где $\tilde e = \sqrt{1 - \frac{b^2\cos^2\alpha_0}{a^2}}$ — эксцентриситет этого эллипса, причем $\tilde b = b\cos\alpha_0$.

Аналогично можно получить выражение для полярного радиуса вертикально ориентированного эллипса

$$R_н(\theta) = \frac{a\cos\alpha_0}{\sqrt{1-\tilde e_1^2\cos^2(\theta-\gamma)}} = \frac{\tilde a}{\sqrt{1-\tilde e_1^2\cos^2(\theta-\gamma)}}, \tag{6.43}$$

где $\tilde e_1^2 = \sqrt{1 - \frac{a^2\cos^2\alpha_0}{b^2}}$ — эксцентриситет эллипса.

Из формул для эксцентриситетов эллипсов разной ориентации при наличии угла наклона α_0 видно, что величина эксцентриситета горизонтального эллипса возрастает с увеличением угла наклона α_0, а величина эксцентриситета вертикально ориентированного эллипса убывает. Соответственно ведут себя и возмущения формы каверны, вызванные отклонением формы кавитатора от круговой.

Поскольку эксцентриситет эллипса всегда меньше единицы, то можно разложить радикалы выражений (6.42) и (6.43) в сходящиеся ряды по степеням малых параметров $\tilde e$ и e_1 соответственно:

$$R_н(\theta) = \begin{matrix}\tilde b\\ \tilde a\end{matrix}\left[1 + \frac{1}{2}\begin{matrix}\tilde e^2\sin^2(\theta-\gamma)\\ \tilde e_1^2\cos^2(\theta-\gamma)\end{matrix} + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\begin{matrix}\tilde e^4\sin^4(\theta-\gamma)\\ \tilde e_1^4\cos^4(\theta-\gamma)\end{matrix} + \right.$$

$$\left. + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\begin{matrix}\tilde e^6\sin^6(\theta-\gamma)\\ \tilde e_1^6\cos^6(\theta-\gamma)\end{matrix} + \ldots\right].$$

Верхняя строчка здесь относится к горизонтально ($b < a$), а нижняя — к вертикально ($a < b$) ориентированному эллипсу. Как

известно, деформация радиуса каверны определяется в виде ряда Фурье, поэтому необходимо и функцию $R_н(\theta)$ также представить в виде такого же ряда. Заменив степени тригонометрических функций, входящие в приведенное разложение $R_н(\theta)$, функциями кратных углов и выполнив необходимые преобразования, запишем выражение, например, для радиуса эллиптического вертикально ориентированного кавитатора при наличии углов наклона α_0 и крена γ в виде

$$R_н(\theta) = R_{н0} + \sum_{n=1}^{\infty} [\tilde{\xi}_{2n}\tilde{e}_1^{2n}\cos 2n\gamma \cos 2n\theta + \tilde{\eta}_{2n}\tilde{e}_1^{2n}\sin 2n\gamma \sin 2n\theta]. \quad (6.44)$$

Здесь функции $\tilde{\xi}_{2n}$, $\tilde{\eta}_{2n}$ и $R_{н0}$ вычисляются по формулам

$$\tilde{\xi}_{2n} = \tilde{\eta}_{2n} = \tilde{b}\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(2k-1)!!\,(2k)!}{(2k)!!\,(k+n)!\,(k-n)!}\,\frac{\tilde{e}_1^{2(k-n)}}{2^{2k-1}},$$

$$R_{н0} = \frac{2\tilde{b}}{\pi}K(\tilde{e}_1),$$

где $K(\tilde{e}_1)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. Функции $\xi_{2n,0}$ и $\eta_{2n,0}$, как это следует из (6.44), имеют вид

$$\xi_{2n,0} = \tilde{\xi}_{2n}\tilde{e}_1^{2n}\cos 2n\gamma, \quad \eta_{2n,0} = \tilde{\eta}_{2n}\tilde{e}_1^{2n}\sin 2n\gamma.$$

При $\gamma = 0$ получаем вертикально вытянутый вдоль оси oy эллипс; $\gamma = \pi/2$ соответствует горизонтально ориентированному эллипсу, когда большая ось $2a$ направлена вдоль оси oz; кроме того, необходимо заменить в формулах величину $\tilde{e}$ на $\tilde{e}_1$.

Выражение (6.44) позволяет интерпретировать эллиптический кавитатор с углами наклона α_0 и крена γ, как некоторый круговой радиуса $R_{н0}$, на который уже в начальный момент $t = 0$ действуют возмущения вида:

$$\begin{aligned}
&\xi_1(0) = 0, && \eta_1(0) = 0,\\
&\xi_2(0) = \tilde{e}_1^2\tilde{\xi}_2\cos 2\gamma, && \eta_2(0) = \tilde{e}_1^2\tilde{\eta}_2\sin 2\gamma,\\
&\xi_3(0) = 0, && \eta_3(0) = 0,\\
&\xi_4(0) = \tilde{e}_1^4\tilde{\xi}_4\cos 4\gamma, && \eta_4(0) = \tilde{e}_1^4\tilde{\eta}_4\sin 4\gamma,\\
&\xi_5(0) = 0, && \eta_5(0) = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots
\end{aligned} \quad (6.45)$$

Такой круговой кавитатор $R_{н0}$, как отмечалось выше, будем называть эффективным.

Система дифференциальных уравнений (6.30) с начальными условиями (6.40) и (6.45) решалась численно, полученные значения

функций ξ_n и η_n использовались для определения формы поперечных сечений каверны. Величина осесимметричной деформации ξ_0 определялась так же, как и в случае наклона кавитатора на угол α_0 (гл. 6, § 1). Радиусы поперечных сечений каверны вычисляются по формуле

$$R(t,\theta,\alpha_0,\gamma) = R_к\cos\alpha_0\mu(\alpha_0,t)f(t) + \sum_{n=2}^{\infty}(\xi_n\cos n\theta + \eta_n\sin n\theta),$$

где

$$\mu(\alpha_0,t) = \frac{1}{\sqrt{\cos\alpha_0}}\begin{cases}1 - t(1-\sqrt{\cos\alpha_0}), & t \leqslant 1,\\ 1-(2-t)(1-\sqrt{\cos\alpha_0}) & t > 1,\end{cases}$$

$$f(t) = \sqrt{1-(1-\lambda^2)(1-t)^{2/\varkappa}}.$$

Система нелинейных уравнений решалась методом Рунге—Кутта с автоматическим выбором шага. Точность расчетов принималась в каждом случае такой, чтобы погрешность при вычислении величины относительного радиуса каверны $R/R_н$ не превышала 1 %. Результаты расчетов печатались в виде таблиц величин $R/R_н$ при $\theta = 0 \div 360°$ ($\Delta\theta = 10°$ или $15°$) в сечениях $t = 0{,}25 \div 1{,}75$ ($\Delta t = 0{,}25$ и $\Delta t = 0{,}125$). В конце таблиц печатались две строчки значений вертикального и горизонтального искривлений оси каверны, умноженные на 100, т. е. $100\,\xi_1$ и $100\,\eta_1$ соответственно. По табличным значениям радиусов каверны в конкретном сечении $t = \mathrm{const}$ строилась форма поперечного сечения каверны.

Задача об определении формы каверны за кавитатором эллиптической формы при наличии на нем углов наклона α_0 и крена γ в весомой жидкости, изложенная в данном параграфе, является наиболее общей. Все ранее рассмотренные задачи — частные случаи. Так, при $\tilde{e}^2 = \sin^2\alpha_0$ получим задачу о несимметричном кавитационном течении за круговым кавитатором, которая изложена в § 3 настоящей главы. При $\tilde{e}^2 = \sin^2\alpha_0$ и $\gamma = 0$ имеем случай кавитационного обтекания кругового кавитатора, наклоненного на угол α_0, который рассмотрен в § 1 и 2. Когда $\alpha_0 = \gamma = 0$, это соответствует кавернам за эллиптическими кавитаторами, которые исследуются в гл. 5. Если $\tilde{e}^2 = 1$, а $\alpha_0 = \gamma = 0$, это будут каверны в весомой жидкости за круговыми кавитаторами.

Многочисленные вычисления, выполненные в широком диапазоне изменения чисел кавитации σ, Фруда Fr, а также углов наклона α_0 и крена γ, позволяют сделать следующие выводы. При $\tilde{e}^2 < 0{,}8$ влияние эллиптической конфигурации кавитатора может быть существенно, но достаточно ограничиться всего 20 членами ряда Фурье; при $\tilde{e}^2 \to 0{,}97$ ($b/a = 1/6$) очень быстро увеличивается количество членов ряда Фурье, которые необходимо учитывать. Но даже при очень близком к единице значении эксцентриситета нет необходимости учитывать больше 50 членов ряда Фурье. Существенно меняется вели-

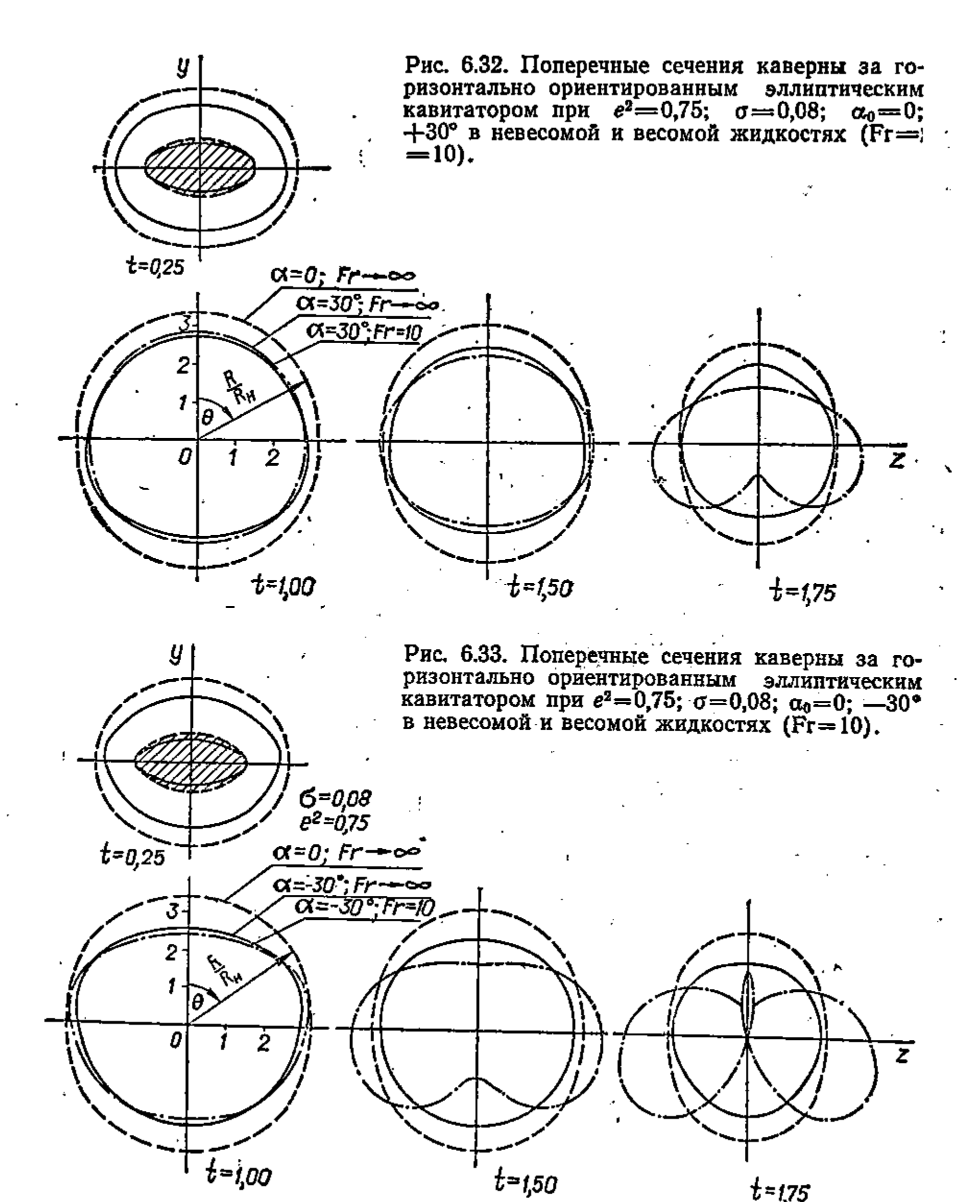


Рис. 6.32. Поперечные сечения каверны за горизонтально ориентированным эллиптическим кавитатором при $e^2=0{,}75$; $\sigma=0{,}08$; $\alpha_0=0$; $+30°$ в невесомой и весомой жидкостях (Fr = 10).

Рис. 6.33. Поперечные сечения каверны за горизонтально ориентированным эллиптическим кавитатором при $e^2=0{,}75$; $\sigma=0{,}08$; $\alpha_0=0$; $-30°$ в невесомой и весомой жидкостях (Fr = 10).

чина эксцентриситета с увеличением угла наклона α_0 только для небольших удлинений $\Lambda = 2 \div 3$ ($\Lambda = b/a$). Так, при $\Lambda = 2$ и величинах угла наклона $\alpha_0 = 0$; 15; 30; 45° квадрат эксцентриситета будет равен соответственно $\tilde{e}^2 = 0{,}75$; 0,76; 0,78; 0,82. С ростом удлинения, например при $\Lambda = 6$, величина квадрата эксцентриситета при тех же значениях углов будет $\tilde{e}^2 = 0{,}97 - 0{,}98$.

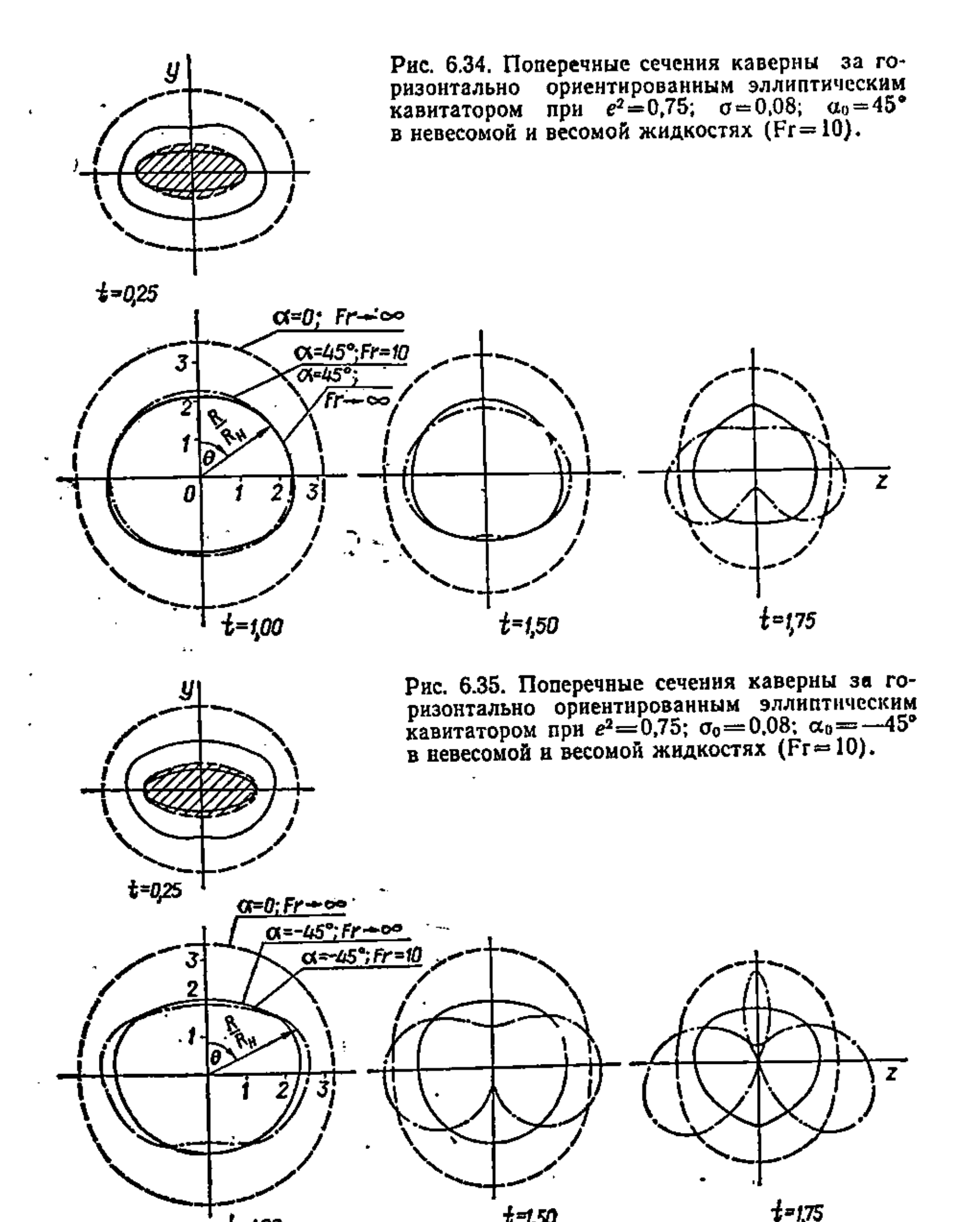


Рис. 6.34. Поперечные сечения каверны за горизонтально ориентированным эллиптическим кавитатором при $e^2=0{,}75$; $\sigma=0{,}08$; $\alpha_0=45°$ в невесомой и весомой жидкостях (Fr = 10).

Рис. 6.35. Поперечные сечения каверны за горизонтально ориентированным эллиптическим кавитатором при $e^2=0{,}75$; $\sigma_0=0{,}08$; $\alpha_0=-45°$ в невесомой и весомой жидкостях (Fr = 10).

Искривления оси каверны за эллиптическими кавитаторами и за эффективным круговым кавитатором для эллипсов небольших удлинений ($\Lambda \leqslant 2$) отличаются мало. При этом искривление оси каверны за эффективным кругом будет приближенно равно некоторой средней величине между значениями искривления оси каверны, возникшей за горизонтально и вертикально ориентированными эллипти-

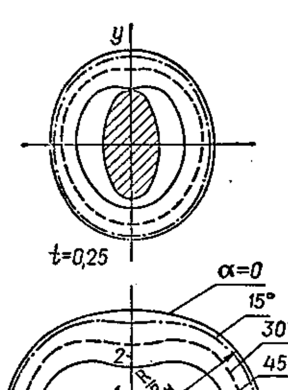
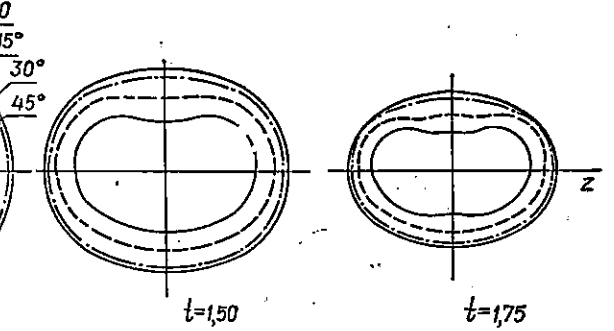


Рис. 6.36. Поперечные сечения каверны за вертикально ориентированным эллиптическим кавитатором при $e^2=0{,}75$; $\sigma=0{,}08$ в невесомой жидкости при углах наклона $\alpha_0=0$; 15; 30; 45°.



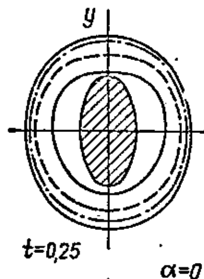
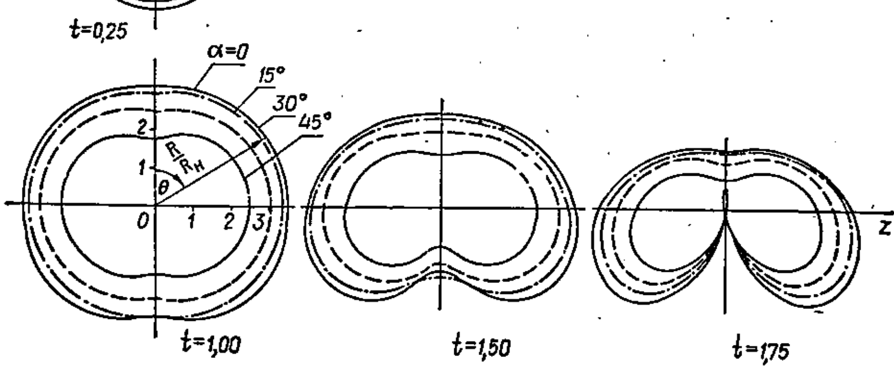


Рис. 6.37. Поперечные сечения каверны за вертикально ориентированным эллиптическим кавитатором при $e^2=0{,}75$; $\sigma=0{,}08$ в весомой жидкости (Fr=10) при углах наклона $\alpha_0=0$; 15; 30; 45°.



ческими кавитаторами. Это справедливо как для отрицательных, так и для положительных углов наклона и крена [128].

Рассмотрим формы сечений каверны за эллиптическими кавитаторами разных удлинений и ориентации при наличии только углов наклона α_0. Ориентация осей сечения каверны в невесомой жидкости за эллиптическими кавитаторами меняется по длине каверны.

Это хорошо иллюстрируют рис. 6.32 — 6.37, на которых показаны сечения каверн $t = 0{,}25$; 1,00; 1,50; 1,75 при $\sigma = 0{,}08$; $e^2 = 0{,}75$ ($\Lambda = 2$) для горизонтально и вертикально ориентированных эллиптических кавитаторов с положительными и отрицательными углами наклона. Площадь кавитатора на рисунках заштрихована; штриховыми линиями помечен кавитатор при $\alpha_0 = 0$, а сплошными — при $\alpha_0 \neq 0$. Хорошо видно уменьшение площади сечения срыва струй из-за наклона кавитатора. На рис. 6.32 — 6.35 сечения каверн в невесомой жидкости (Fr $\to \infty$) при $\alpha_0 = 0$ нанесены штриховыми, а при $\alpha_0 \neq 0$ сплошными линиями; для случая весомой жидкости (Fr = = 10) сечения помечены штрихпунктирными линиями. Из-за наклона кавитатора сечения каверны не только деформируются, но и существенно уменьшаются по площади, что также хорошо видно на рисунках.

В невесомой жидкости в передней части каверны, возникшей за горизонтально ориентированным эллиптическим кавитатором, при $\alpha > 0$ так же, как и в случае каверны за диском, сильнее сплющена верхняя часть сечений. В конце каверны, кроме того, что происходит переориентация осей сечений, в верхней части каверны появляется выпуклость, а в нижней части сечения оказываются сильнее приплюснутыми, чем в начале каверны (рис. 6.32, 6.34). При отрицательном угле наклона наблюдается противоположная картина (рис. 6.33, 6.35), возникающая из-за совместного действия на каверну подъемной силы, созданной наклоном кавитатора на угол α_0, и отклонения формы кавитатора от круговой. В случае весомой жидкости эта картина не наблюдается, поскольку весомость превалирует над действием указанных сил. Ориентация осей сечения каверны в весомой жидкости не меняется, поскольку весомость препятствует этому. Высоты гребней в конце каверны в данном случае близки к их величинам за эффективным кругом. Однако величина гребня при $\alpha_0 > 0$ будет меньше, а при $\alpha_0 < 0$ больше, чем в каверне за эффективным диском. Это хорошо видно на рис. 6.34, 6.35, где приведены сечения при $\alpha_0 = \pm 45°$. В сечении $t = 1{,}75$ при $\alpha_0 = -45°$ каверна уже разрушилась в весомой жидкости (штрихпунктирные линии, рис. 6.35), а при $\alpha_0 = 45°$ гребень внизу каверны достаточно велик, но каверна еще существует (рис. 6.34).

Если эллиптический кавитатор вертикально ориентирован, то оси сечений каверны меняют ориентацию в невесомой и весомой жидкостях (рис. 6.36, 6.37). В передней части каверны наблюдаются сходные картины деформации сечений в невесомой и весомой жидкостях, а в послемидельной части, особенно в конце при $t = 1{,}75$, деформации различны. В конце каверны велики деформации от весомости, кроме того, сечения каверны здесь становятся горизонтально ориентированными, наличие угла наклона на кавитаторе также сжимает каверну по горизонтали. Эти три действия складываются, так что и суммарное возмущение в конце каверны будет большим, что хорошо видно на рис. 6.37 при $t = 1{,}75$ и $\alpha_0 > 0$. При $\alpha_0 < 0$ каверна в этом сечении не существует. Но формы сечений каверны и при данной ориентации эллиптического кавитатора при небольших

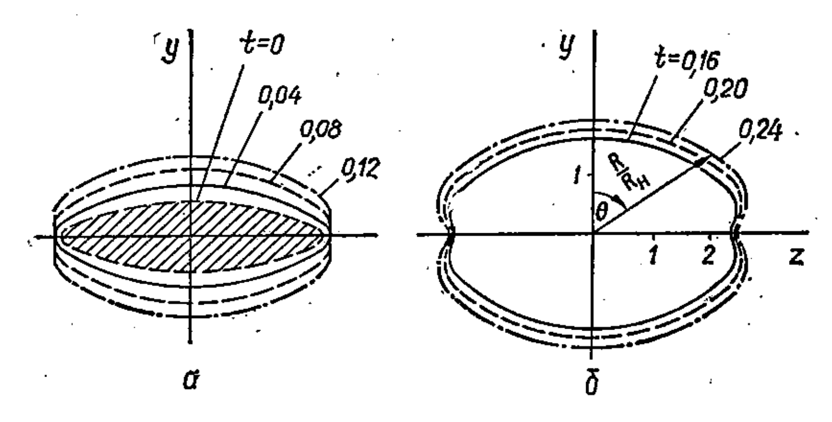


Рис. 6.38. Поперечные сечения каверны вблизи кавитатора при удлинении $\Lambda=4$.

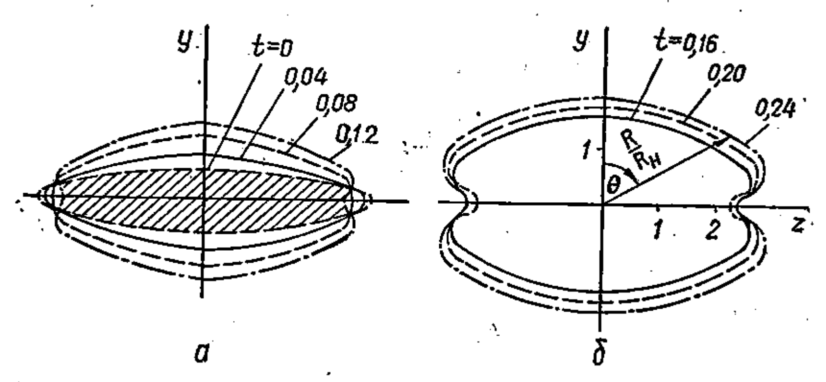


Рис. 6.39. Поперечные сечения каверны вблизи кавитатора при удлинении $\Lambda=6$.

удлинениях ($\Lambda \leqslant 2$) будут близки к форме сечений каверн за соответствующими эффективными кавитаторами.

При больших удлинениях эллиптических кавитаторов $\Lambda \geqslant 3 - 6$ картина сильно усложняется.

Попытаемся проследить влияние удлинения эллиптического кавитатора на геометрию каверн в случае несимметричного его расположения относительно скорости набегающего потока. Экспериментальные исследования влияния прямоугольной пластины, поставленной нормально к набегающему потоку, на ширину миделя каверны проводились В. А. Лапиным [76]. Ю. Д. Власенко и В. Н. Башарова [9] рассматривали каверны за кавитаторами больших удлинений с локальными особенностями. В данном случае, поскольку контур эллиптического кавитатора является гладкой кривой без особенностей, можно более четко выявить влияние именно удлинения кавитатора на размеры каверны.

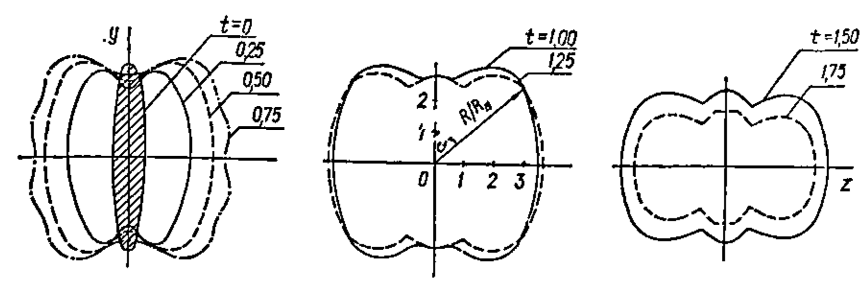


Рис. 6.40. Вид поперечных сечений каверны в невесомой жидкости при $\sigma=0{,}08$; $\Lambda=1/6$; $\alpha=0$.

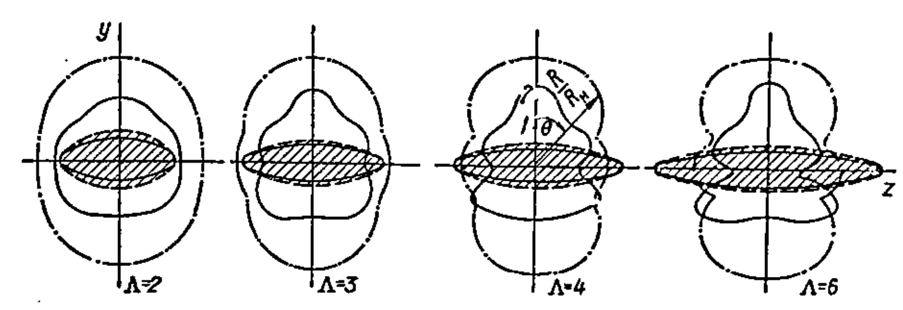


Рис. 6.41. Вид поперечных сечений каверны в невесомой жидкости при $t=1{,}75$ и $\alpha=0$ (штрихпунктирные линии); $\alpha=45°$ (сплошные линии) для различных удлинений.

Вблизи эллиптических кавитаторов небольшого удлинения (Λ — отношение горизонтального размера кавитатора к вертикальному) $\Lambda \leqslant 2$ сечения каверн сохраняют конфигурацию, подобную форме этого кавитатора. При больших удлинениях форма сечений каверны возле кавитатора будет иной. На рис. 6.38, 6.39 приводятся формы сечений каверны непосредственно за плоскостью срыва струй при $t = 0{,}04 \div 0{,}24$ ($\Delta t = 0{,}04$) для $\Lambda = 4$ и $\Lambda = 6$. Кавитатор на рисунках заштрихован. Хорошо видно, что при $\Lambda = 4$ в промежуток времени $0 \leqslant t \leqslant 0{,}04$ каверна интенсивно расширяется, но дальше такое расширение происходит только вдоль малой оси, в то время как вдоль большой оси изменение поперечных размеров каверны значительно слабее (рис. 6.38, *а*). В последующие моменты времени вдоль большой оси формируются продольные впадины (рис. 6.38, *б*). При большем удлинении $\Lambda=6$ такие впадины появляются сразу за кавитатором и они более глубокие. Интересно проследить изменение формы сечений по всей длине в невесомой жидкости. С удалением от кавитатора в околомидельной части сечения каверны стремятся к форме сильно деформированного круга, а впадины вдоль большой оси уменьшаются. В конце каверны происходит переориентация осей сечений, а впадины, которые были в домидельной части, деформируются в две меньшие впадины с выпуклостью посредине. Это хорошо видно на рис. 6.40, где приведены сечения каверны $0 \leqslant t \leqslant 1{,}75$ ($\Delta t = 0{,}25$) при $\sigma = 0{,}08$; $Fr \to \infty$; $\Lambda = 1/6$. На

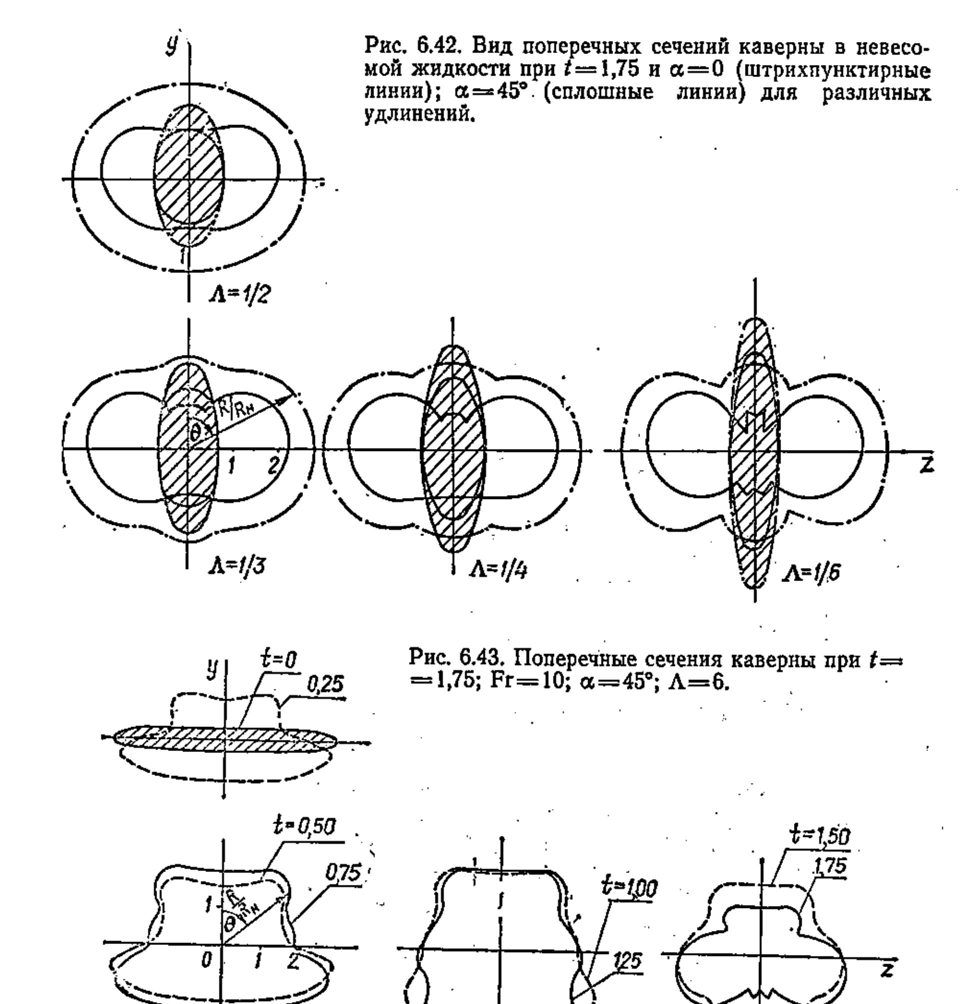


Рис. 6.42. Вид поперечных сечений каверны в невесомой жидкости при $t=1{,}75$ и $\alpha=0$ (штрихпунктирные линии); $\alpha=45°$ (сплошные линии) для различных удлинений.

Рис. 6.43. Поперечные сечения каверны при $t=1{,}75$; Fr=10; $\alpha=45°$; $\Lambda=6$.

рис. 6.41, 6.42 приведены сечения каверн $t=1{,}75$ в невесомой жидкости при разных удлинениях: $\Lambda = 2,\ 3,\ 4,\ 6$ и $\Lambda = 1/2,\ 1/3,\ 1/4,\ 1/6$. С ростом удлинения увеличивается деформация сечения каверн. При больших удлинениях форма сечений каверны с удалением от кавитатора очень далека даже от сильно деформированного круга. Такая картина деформирования сечений каверны за сильно вытянутыми кавитаторами-пластинами качественно согласуется с экспериментальными данными.

Сечения каверн за кавитаторами больших удлинений, наклоненных на угол α_0 к скорости набегающего потока, в весомой жидкости могут иметь разную и весьма сложную форму. На рис. 6.43, 6.44

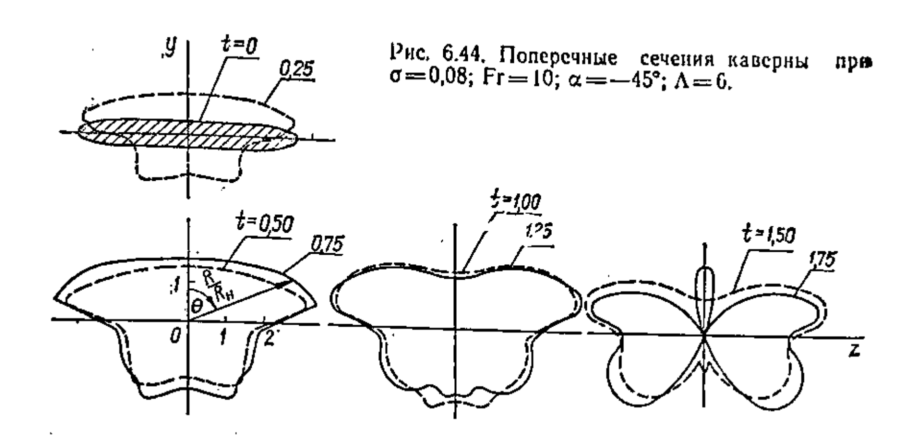


Рис. 6.44. Поперечные сечения каверны при $\sigma=0{,}08$; Fr=10; $\alpha=-45°$; $\Lambda=6$.

показаны сечения каверн $0 \leqslant t \leqslant 1{,}75$ ($\Delta t = 0{,}25$) при $\sigma = 0{,}08$; $\mathrm{Fr} = 10$; $\Lambda = 6$ (горизонтально ориентированный кавитатор) и углах наклона α_0, равных 45° и —45° соответственно. Совместное деформирование каверны тремя компонентами — весомостью, сильным отклонением формы кавитатора от круговой и подъемной силой на кавитаторе — создают сечения каверны сложной конфигурации. В этом случае на переднюю часть каверны существенно действуют две компоненты, поскольку влияние весомости здесь еще мало. Сравнив сечения $t = 0{,}24$ (рис. 6.38) и $t = 0{,}25$ (рис. 6.43, 6.44), видим, что наличие угла наклона деформирует фактически половину каверны: верхнюю или нижнюю в зависимости от знака угла наклона. Такого вида картина наблюдается во всех сечениях до миделя ($t \leqslant 0{,}75$). Уже в миделе, где начинает проявляться действие силы тяжести, сечения каверн при положительных и отрицательных углах наклона будут деформированы по-разному. В сечениях $t = 1{,}00$ и $t = 1{,}50$ при $\alpha_0 = 45°$ взаимодействие этих трех компонент создаст сечения, по форме приближенно симметричные относительно координатных осей. Но при $t = 1{,}75$ начинает превалировать весомость, что и проявляется в своеобразном контуре сечения каверны (рис. 6.43). Сравнить проявление совместного действия отклонения формы кавитатора от круговой и наличия угла наклона на кавитаторе на геометрию каверны в невесомой и весомой жидкостях в сечении $t = 1{,}75$ можно по рис. 6.41 и 6.43. При отрицательных углах наклона кавитатора в конце каверны действие гидродинамической силы на кавитаторе и весомости направлены одинаково, поэтому возмущение может стать таким большим, что каверна разрушится (рис. 6.44). Необходимо отметить, что сечения каверн за горизонтально ориентированными эллиптическими кавитаторами больших удлинений с углами наклона существенно отличаются от формы сечений каверн за соответствующими им эффективными круговыми кавитаторами. Таким образом, в этом случае формы сечений каверн с удалением от кавитатора не стремятся к круговой.

Рассмотрим конфигурацию сечений каверн в весомой жидкости за эллиптическими вертикально ориентированными кавитаторами боль-

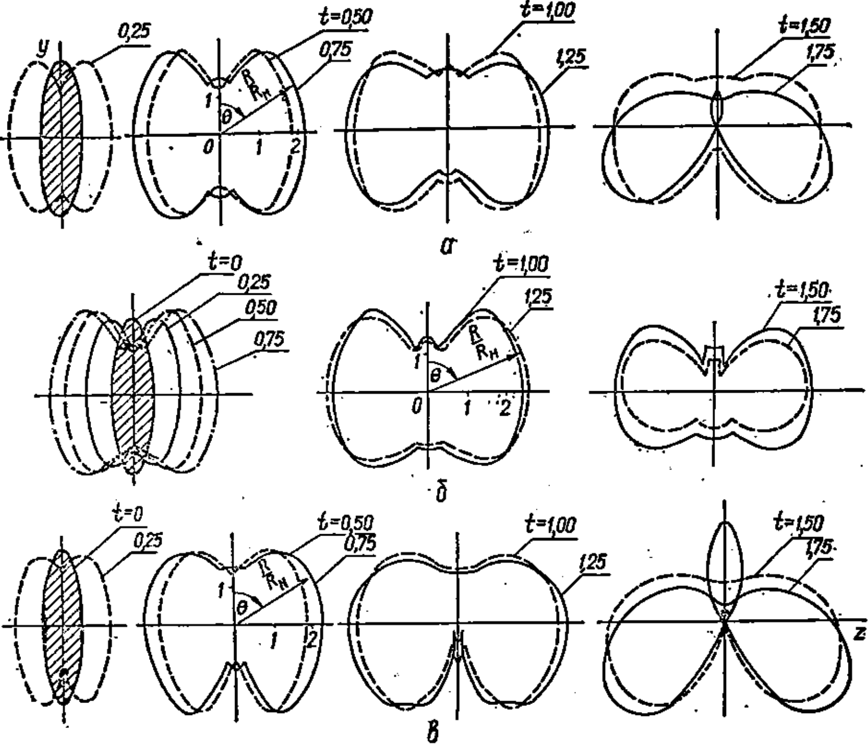


Рис. 6.45. Поперечные сечения каверны при $\sigma=0{,}08$; $\Lambda=1/6$:
а — Fr=10; $\alpha=45°$; *б* — Fr→∞; $\alpha=45°$; *в* — Fr=10; $\alpha=-45°$.

ших удлинений при наличии углов наклона их к скорости набегающего потока. В передней части каверны деформация сечений будет сходна со случаем в невесомой жидкости, но при этом выемка вдоль большой оси каверны будет большей с той стороны, где действует на каверну гидродинамическая сила, вызванная наличием угла наклона. На рис. 6.45, *а*, *б*, *в* приводятся сечения $0 \leqslant t \leqslant 1{,}75$ ($\Delta t = 0{,}25$) при $\sigma = 0{,}08$; Fr = 10; $\Lambda = 1/6$ и углах наклона, равных 45° и —45° соответственно. Сравнение сечений на этих рисунках и на рис. 6.40 показывает, что деформации сечений в передней части каверны близки. По длине каверны происходит переориентация осей ее сечений и в конце каверны сечения будут в этом случае горизонтально ориентированными. Весомость, а также наличие угла наклона на кавитаторе вызывают сжатие сечения по горизонтали. Поэтому сечения каверны будут сильнее сплющены, чем в каверне за диском, но в целом их форма будет сходна с формой каверны за эффективным круговым кавитатором, хотя сложение действия этих трех компонент приведет к тому, что при $t = 1{,}75$ каверна не будет существовать (рис. 6.45).

Следовательно, можно сделать вывод, что каверны за кавитаторами эллиптической конфигурации больших удлинений по всей геометрии существенно отличаются от каверн за соответствующими им эффективными кавитаторами. Сечения каверн могут иметь в весомой жидкости при наличии углов наклона кавитатора очень сложную, даже экзотическую форму. Поэтому необходимо в каждом конкретном случае определять форму каверны за такими кавитаторами.

Деформация сечений каверны при наличии на эллиптическом кавитаторе углов наклона α_0 и крена γ несимметрична относительно вертикальной и горизонтальной меридиональных плоскостей. Величины деформаций растут с увеличением углов наклона α_0 и крена γ. Форма поперечных сечений каверны напоминает такую, какой она была бы, если бы весомость действовала в меридиональной плоскости, повернутой относительно вертикали на угол, близкий по величине угла крена γ. Это хорошо иллюстрируют рис. 6.32, 6.34, на которых приведены поперечные сечения каверн с удлинением при различной ориентации эллиптического кавитатора для течения $\sigma = 0{,}08$ и Fr = 10. На рис. 6.32 приведены поперечные сечения каверн $t = 0{,}25$; 1,00; 1,75 при $\alpha_0 = 15°$ и $\gamma = -15°$ для горизонтально (сплошные линии) и вертикально (штриховые линии) ориентированных кавитаторов. На рис. 6.33, 6.34 изображены поперечные сечения каверн $t = 0{,}25$; 1,00; 1,75 и $\alpha_0 = 25°$ при угле крена $\gamma = 25°$ (сплошные линии) и $\gamma = -25°$ (штриховые линии) для горизонтально и вертикально ориентированных эллиптических насадков соответственно. На этих же рисунках штрихпунктирными линиями нанесены сечения каверн за эффективным круговым кавитатором. Сравниваемые поперечные сечения каверн за эллиптическими кавитаторами и соответствующими им эффективными круговыми насадками очень близки между собой, расхождения относительного радиуса $R/R_н$ меньше 10 %. Аналогично было проведено сравнение формы поперечных сечений каверны за эллиптическими и круговыми кавитаторами произвольной ориентации при отрицательных углах наклона $\alpha_0 < 0$. В этом случае углублялся и поворачивался гребень внизу каверны, но также формы каверны за кругом и эллипсом были очень близки.

Следовательно, отметим, что при удлинениях $\Lambda \leqslant 2$ вместо расчета каверны за эллиптическим несимметричным кавитатором при углах наклона и крена можно рассчитывать каверну за эффективным круговым кавитатором. При этом погрешность будет незначительной. В случае несимметричного расположения ($\alpha_0 \neq 0$; $\gamma \neq 0$) к скорости набегающего потока эллиптического кавитатора большого удлинения $\Lambda > 2 \div 6$ картина сильно усложняется.

В заключение уместно подчеркнуть, что все в данном параграфе, относящееся к поведению каверн за сильно вытянутыми пластинчатыми кавитаторами, имеет весьма качественный характер и нисколько не претендует на достоверное описание изучаемых явлений. Это связано в первую очередь с тем, что разрабатываемая здесь теория базируется на малых возмущениях и в основу главных соотношений положены идеи, хорошо отвечающие явлениям в средней части каверны. И тем не менее сравнение полученных результатов с экспериментальными данными показывает, что качественный характер деформаций формы каверны изложенные здесь методы улавливают верно.

ГЛАВА 7

ВРАЩЕНИЕ ЖИДКОСТИ И ПРОФИЛЬ ЕЕ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ВИХРЕВЫХ ВОРОНКАХ

Теоретическое описание движения жидкости при наличии вихревой воронки неразрывно связано с достижениями в области описания вращательного движения жидкости вообще. Однако наличие различного рода особенностей (свободная поверхность, разнообразие граничных условий и т. д.) привело к тому, что математическое описание вихревой воронки развивалось довольно медленно и в настоящее время воронкообразование является одним из наименее изученных видов закрученных течений.

Развитие такого теоретического описания началось с представления о воронке как о вихрестоке идеальной жидкости, который описывается комплексным потенциалом [84]. Однако такая модель течения, хотя и позволяет рассчитать все компоненты скорости течения, приводит к воздушному ядру вихревой воронки бесконечной глубины, что противоречит наблюдениям.

А. Гибсон предполагает [35], что имеют место три разновидности профиля воздушного ядра, соответствующего трем видам вращательного движения жидкости со свободной поверхностью, которые он называет соответственно «свободным вихрем», «вынужденным вихрем» и «сложным вихрем». «Вынужденный вихрь» можно наблюдать при вращении цилиндрического сосуда с жидкостью с постоянной угловой скоростью Ω. Считая, что тангенциальная компонента скорости равна $U_\varphi = \Omega r$, можно из уравнения Бернулли найти профиль воронки, который получается параболическим. «Свободный вихрь» характеризуется тем, что скорость вращения жидкости убывает обратно пропорционально радиусу: $U_\varphi = \frac{\Gamma_0}{r}$.

Профиль воронки в этом случае является гиперболическим, а глубина воздушной воронки — бесконечной. Поскольку на практике глубина воронки может иметь конечную величину, то А. Гибсон в этом случае предлагает считать, что у оси вращения в реальных условиях существует «вынужденный вихрь», а на некотором расстоянии от оси — «свободный вихрь». Такое движение жидкости он называет «сложным вихрем». Аналогичный результат был получен и другими авторами [75, 119]. Такие схемы имеют существенный недостаток: они не учитывают влияние вязкости на течение при наличии вихревой воронки.

Другую, более сложную, схему описания вихревой воронки с позиций движения идеальной жидкости предложил О. Ф. Васильев [29]. Здесь главной гипотезой является предположение о том, что частицы жидкости в вихревой воронке вовлекаются в винтовое движение ($\mathrm{rot}\ \vec{U} = \varkappa \vec{U}$). Рассматривая однородное винтовое движение жидкости из бесконечности к бесконечно малому отверстию, О. Ф. Васильев нашел распределения трех компонент скорости как по радиусу, так и по глубине жидкости. В результате получилось, что тангенциальная скорость увеличивается ко дну, а радиальная — к свободной поверхности жидкости, т. е. при винтовом движении засасывается жидкость из верхних слоев. В работе [102] Н. А. Притвиц приводит пример расчета по этой схеме круглого циркуляционного отстойника непрерывного действия.

Оригинальную модель течения жидкости при наличии вихревой воронки предложил А. Я. Милович [90]. Он считает, что истечение из отверстия всегда должно быть вращательным из-за того, что края донного отверстия генерируют вихревой соленоид: при этом в вытекающей струе жидкости вблизи оси обязательно должен быть вихревой шнур.

Однако по мере накопления экспериментальных данных становилось ясно, что теоретические модели, описывающие движение жидкости при воронкообразовании, необходимо строить с учетом вязкости.

В. И. Поликовский и Р. Г. Перельман, рассматривая воронкообразование в жидкости с открытой поверхностью, предложили [101] схему описания вихревой воронки с учетом вязкости и расхода. Использовав уравнение изменения момента количества движения и вычислив момент вязкости сил трения, они нашли распределение вращательной компоненты скорости по радиусу, считая при этом течение плоским.

В такой постановке задачи после интегрирования уравнения движения в решении появляются неопределенные константы. Поэтому схема должна дополняться экспериментально найденным или полученным из какого-либо расчета профилем воронки, с помощью которого можно найти неопределенные константы и рассчитать поле вращательной скорости. В работе [101] предлагается эмпирическая формула для нахождения профиля свободной поверхности по известному профилю воронки в случае идеальной жидкости и вращательному числу Рейнольдса $\mathrm{Re}_\varphi = \frac{U_\varphi r}{\nu}$.

Х. А. Эйнштейн и Х. Ли предложили [151] рассчитывать распределение вращательной скорости по расходу жидкости в радиальном направлении. Всю область течения они разбили на две характерные области: расположенную над донным отверстием и вне его. Предполагается, что над донным отверстием радиальный расход пропорционален квадрату радиуса, в то время как во второй области расход постоянен. С учетом того, что понижение уровня свободной поверхности незначительно, по радиальному расходу жидкости было найдено рас-

пределение радиальной скорости, которое затем подставлялось в уравнение для вращательной компоненты скорости из системы уравнений Навье — Стокса для случая плоской задачи. Проведенный таким образом расчет показал, что распределение вращательной скорости по радиусу определяется величиной радиального числа Рейнольдса. Главным недостатком предлагаемой модели течения жидкости в вихревой воронке является предположение о постоянстве высоты жидкости, которое реализуется в редких случаях, не применяемых обычно на практике. В частности, при проникновении воздушного ядра вихревой воронки в донное отверстие существует радиус, на котором высота жидкости равна нулю. Но, несмотря на то что модель Х. А. Эйнштейна и Х. Ли имеет определенные недостатки, в настоящее время он наиболее близко описывает реальную физическую картину течения.

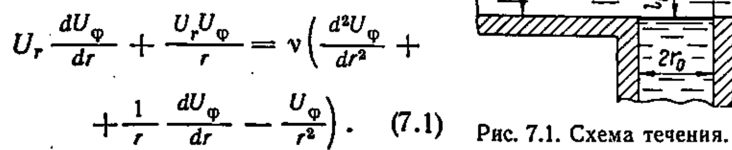
Попытка включения профиля воздушного ядра в расчет поля скоростей была сделана В. В. Никулиным [94], который рассматривал бесконечную прямую вихревую нить в вязкой жидкости, упирающуюся в свободную поверхность. Предполагалось, что воздушное ядро имеет форму конуса с осью симметрии, совпадающей с осью нити. Силой тяжести пренебрегается. Показано, что в сферической системе координат может быть найдено решение определенного вида, которое, по сути, является лишь модификацией решения для плоского потенциального вращения.

Таким образом, анализ литературных данных показывает, что существующие теоретические модели движения жидкости при наличии вихревой воронки обладают рядом недостатков и часто не соответствуют реальной картине течения или отдельным ее аспектам. В части теоретических построений предполагается постоянство высоты жидкости, хотя понижение уровня свободной поверхности сильно влияет на течение жидкости. Это приводит к значительным погрешностям при вычислении величины вращательной скорости, особенно для приосевой области. В то же время потребности практики все чаще требуют создания более точных методов расчета поля скоростей жидкости в вихревой воронке, а также формы ее свободной поверхности.

§ 1. РАСЧЕТ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЦИРКУЛЯЦИИ ВРАЩАТЕЛЬНОЙ СКОРОСТИ ПО РАДИУСУ

Исследуем истечение закрученного потока жидкости через центрально расположенное круглое отверстие в плоском дне (рис. 7.1). Полученные экспериментальные данные [1, 144, 150] свидетельствуют о том, что тангенциальная компонента скорости жидкости в вихревой воронке не изменяется по глубине жидкости, за исключением придонного пограничного слоя. Поэтому предположим, что вращательная компонента скорости зависит только от расстояния до оси вращения. Считаем также, что течение является осесимметричным, т. е. $\frac{\partial U_i}{\partial \varphi} = 0$ в уравнениях движения.

Рассмотрим уравнение для тангенциальной компоненты скорости из системы уравнений Навье — Стокса, записанных в цилиндрической системе координат, с учетом указанных выше предположений:



$$U_r \frac{dU_\varphi}{dr} + \frac{U_r U_\varphi}{r} = \nu\left(\frac{d^2U_\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dU_\varphi}{dr} - \frac{U_\varphi}{r^2}\right). \quad (7.1)$$

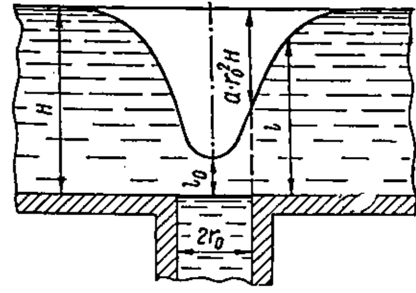


Рис. 7.1. Схема течения.

Переходя к безразмерным величинам $\Pi = \frac{U_\varphi r}{\Gamma_0}$ и $x = \left(\frac{r}{r_0}\right)^2$, где r_0 — радиус донного отверстия, Γ_0 — величина циркуляции на бесконечности, из уравнения (7.1) получаем следующее уравнение:

$$\frac{2\nu}{U_r r} x \frac{d^2\Pi}{dx^2} - \frac{d\Pi}{dx} = 0, \quad (7.2)$$

Уравнение (7.2) умножим на 2π и проинтегрируем по z от δ до l (l — текущая высота жидкости в резервуаре, δ — толщина придонного пограничного слоя, в котором вращение жидкости зависит от расстояния до дна):

$$2\pi \int_\delta^l 2\nu x \frac{\frac{d^2\Pi}{dx^2}}{\frac{d\Pi}{dx}} dz = \int_\delta^l 2\pi r U_r dz = Q.$$

Величина Q представляет собой радиальный расход жидкости, протекающей вне придонного пограничного слоя.

Если рассматривать свободное истечение жидкости через отверстие в дне, то величина Q для неразвитой воронки в области $x \gg 1$ приблизительно равна общему расходу через систему и может быть вычислена по формуле $Q = \mu\pi r_0^2 \sqrt{2gH}$, где $\mu \cong 0{,}63$. Однако на практике, как правило, расход через гидравлическую систему, использующую (или имеющую) воронку, определяется технологическими требованиями. Поэтому в общем случае величина Q является одним из независимых параметров течения при наличии вихревой воронки.

После интегрирования и деления обеих частей уравнения на величину высоты жидкости на бесконечности H получим

$$4\pi\nu x \frac{\frac{d^2\Pi}{dx^2}}{\frac{d\Pi}{dx}} \frac{l}{H} - 4\pi\nu x \frac{\frac{d^2\Pi}{dx^2}}{\frac{d\Pi}{dx}} \frac{\delta}{H} = \frac{Q}{H}. \quad (7.3)$$

Поскольку обычно $\frac{l}{H} \gg \frac{\delta}{H}$, то вторым членом в левой части уравнения (7.3) можно пренебречь.

Таким образом, получим искомое уравнение для нахождения циркуляции скорости в следующем виде:

$$xh\frac{d^2\Pi}{dx^2} - \mathrm{Re}\, q\frac{d\Pi}{dx} = 0, \qquad (7.4)$$

где $h = \frac{l}{H}$ — безразмерная текущая высота жидкости; $q = \frac{Q}{Q_1}$ — безразмерный радиальный расход вне пограничного слоя. Величина $\mathrm{Re} = \frac{Q_1}{4\pi\nu H}$ (где Q_1 — радиальный расход жидкости вне пограничного слоя в области вне донного отверстия) представляет собой выражение для так называемого радиального числа Рейнольдса и является величиной отрицательной, так как имеет место сток жидкости. Уравнение (7.4) в дальнейшем будем называть основным уравнением вихревой воронки.

Для того чтобы проинтегрировать уравнение (7.4), необходимо знать вид функций $q = q(x)$ и $h = h(x)$. Для нахождения вида функции h расширим понятие «сложного вихря» А. Гибсона [35], по которому высота жидкости вблизи оси вращения прямо пропорциональна квадрату радиуса, а на некотором удалении от оси вращения — обратно пропорциональна квадрату радиуса. Такая зависимость профиля воздушного ядра вихревой воронки получена для идеальной жидкости. В реальной жидкости показатель степени, в которую возводится радиус, не равен двум и зависит от различных факторов, в частности от вязкости жидкости. Следовательно, функцию h можно записать следующим образом:

$$h = 1 - \frac{a}{x^n}, \quad x \geqslant x_1 \quad (0 < n < 1),$$

$$h = h_0 + bx^m, \left(h_0 = \frac{l_0}{H}\right) \quad x \leqslant x_1,$$

где $x_1 = \sqrt{\frac{na}{mb}}$ — точка перехода функции h из гиперболического вида в параболический; a, b — некоторые постоянные.

При выборе вида функции $q = q(x)$ можно руководствоваться следующими соображениями. Расход жидкости в радиальном направлении на данном радиусе резервуара зависит от высоты жидкости на этом радиусе и ее осевого стока. В модели течения, предложенной Х. А. Эйнштейном и Х. Ли [151], предполагается, что понижение уровня жидкости вблизи оси вращения незначительно, осевая компонента скорости жидкости в области над донным отверстием постоянна на всех радиусах и, следовательно, функция q имеет вид $q = x$. Это не соответствует реальной физической картине течения, согласно которой осевая скорость увеличивается с уменьшением радиуса, а свободная поверхность жидкости, как правило, сильно искривлена. Поэтому реальное q меньше, чем в модели Эйнштейна и Х. Ли, т. е. $q < x$. Кроме того, радиальный расход жидкости зависит и от понижения уровня свободной поверхности, который характеризуется величиной a (рис. 7.1).

Таким образом, с учетом изложенного функция $q(x)$ может быть аппроксимирована функциями следующего вида:

$$q = \gamma x^m \left(\gamma = \frac{x_1^n - a}{x_1^{m+n-1}(1-a)}\right), \quad 0 \leqslant x \leqslant x_1,$$

$$q = \frac{x^n - a}{x^{n-1}(1-a)}, \quad x_1 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$q = 1, \quad x \geqslant 1.$$

Определенный интерес представляет установление граничных условий рассматриваемой задачи. Если первое граничное условие очевидно — на оси вращения циркуляция тангенциальной компоненты скорости жидкости равна нулю, то установление второго граничного условия связано с определенными трудностями. Знание того, что тангенциальная компонента скорости U_φ стремится к нулю с бесконечным увеличением радиуса r, ничего не может дать в определении граничных условий для Π. Возможны следующие варианты:

$$x \to \infty, \quad \Pi \to 0,$$

$$x \to \infty, \quad \Pi \to 1,$$

$$x = x_*, \quad \Pi = \Pi_*.$$

Для того, чтобы выбрать граничное условие, соответствующее задаче, обратимся к литературе. Большинство исследователей [1, 35, 86, 150], основываясь на опытах по изучению вращательного движения жидкости со свободной поверхностью, считают, что с увеличением радиуса величина циркуляции стремится к некоторой постоянной величине Γ_0. При этом, как правило, исследовалось вынужденное воронкообразование. С другой стороны, некоторые ученые [121, 145] получили данные, из которых следует, что с увеличением расстояния от оси вращения циркуляция сначала растет, а затем уменьшается до нуля.

Такой результат, возможно, объясняется тем, что при небольшой интенсивности крутки потока уменьшение циркуляции явилось следствием влияния боковой стенки. Поэтому в дальнейшем в качестве второго граничного условия будем считать условие $x \to \infty$, $\Pi \to 1$.

Проинтегрируем уравнение (7.4), последовательно переходя от первой зоны к третьей согласно виду функции $q(x)$, при этом для удобства вычислений и иллюстрации примем $n = m = 1$.

Зона 1: $0 \leqslant x \leqslant 1$, $h = h_0 + bx$, $q = \gamma x$.

Решением основного уравнения в этой зоне является функция

$$\Pi_1 = c_{11}(h_0 + bx)^{\frac{\mathrm{Re}\gamma}{b}+1} + c_{21}.$$

Подставляя полученное решение в граничное условие

$$\Pi_1 = 0, \quad x = 0,$$

находим из него константу интегрирования c_{21}:

$$c_{21} = -c_{11} h_0^{\frac{\mathrm{Re}\gamma}{b}+1},$$

что позволяет записать выражения для циркуляции и ее производной по x

$$\Pi_1 = c_{11}\left[(h_0 + bx)^{\frac{\mathrm{Re}\gamma}{b}+1} - h_0^{\frac{\mathrm{Re}\gamma}{b}+1}\right],$$

$$\Pi_1' = c_{11}(\mathrm{Re}\,\gamma + b)(h_0 + bx)^{\frac{\mathrm{Re}\gamma}{b}}.$$

Зона 2: $x_1 \leqslant x \leqslant 1$, $h = 1 - \frac{a}{x^n}$, $q = \frac{x^n - a}{x^{n-1}(1-a)}$.

Решением основного уравнения в этой зоне является функция

$$\Pi_2 = c_{12}\exp\left\{\frac{\mathrm{Re}}{1-a}x\right\} + c_{22}.$$

Для нахождения неизвестных констант интегрирования подставим полученное выражение в следующие граничные условия:

$$x = x_1, \quad \Pi_2 = \Pi_1,$$
$$x = x_1, \quad \Pi_2' = \Pi_1',$$

из которых находим, что

$$c_{12} = c_{11}\frac{(\mathrm{Re}\,\gamma + b)(h_0 + bx_1)^{\frac{\mathrm{Re}\gamma}{b}}(1-a)}{\mathrm{Re}\exp\left\{\frac{\mathrm{Re}}{1-a}x_1\right\}},$$

$$c_{22} = c_{11}\left\{(h_0 + bx_1)^{\frac{\mathrm{Re}\gamma}{b}+1} - h_0^{\frac{\mathrm{Re}\gamma}{b}+1} - \right.$$

$$\left. - (\mathrm{Re}\,\gamma + b)(h_0 + bx_1)^{\frac{\mathrm{Re}\gamma}{b}}\frac{(1-a)}{\mathrm{Re}}\right\} = c_{11}A$$

и соответственно

$$\Pi_2 = c_{11}\frac{(\mathrm{Re}\,\gamma + b)(h_0 + bx_1)^{\frac{\mathrm{Re}\gamma}{b}}(1-a)}{\mathrm{Re}\exp\left\{\frac{\mathrm{Re}}{1-a}x_1\right\}}\exp\left\{\frac{\mathrm{Re}}{1-a}x\right\} + c_{11}A,$$

$$\Pi_2' = c_{11}\frac{(\mathrm{Re}\,\gamma + b)(h_0 + bx_1)^{\frac{\mathrm{Re}\gamma}{b}}}{\exp\left\{\frac{\mathrm{Re}}{1-a}x_1\right\}}\exp\left\{\frac{\mathrm{Re}}{1-a}x\right\}.$$

Зона 3: $x \geqslant 1$, $h = 1 - \frac{a}{x}$, $q = 1$.

Решением основного уравнения в этой зоне является функция

$$\Pi_3 = c_{13}\frac{(x-a)^{\mathrm{Re}+1}}{\mathrm{Re}+1} + c_{23}.$$

Неизвестные постоянные интегрирования находим из граничных условий, аналогичных условиям для зоны 2

$$x = 1, \quad \Pi_3 = \Pi_2,$$
$$x = 1, \quad \Pi_3' = \Pi_2',$$

из которых получаем

$$c_{13} = c_{11}\frac{(\mathrm{Re}\,\gamma + b)(h_0 + bx_1)^{\frac{\mathrm{Re}\gamma}{b}}\exp\left\{\frac{\mathrm{Re}}{1-a}(1-x_1)\right\}}{(1-a)^{\mathrm{Re}}} = c_{11}B,$$

$$c_{23} = c_{11}\left[\frac{(1-a)(\mathrm{Re}\,\gamma + b)}{\mathrm{Re}}(h_0 + bx_1)^{\frac{\mathrm{Re}\gamma}{b}}\exp\left\{\frac{\mathrm{Re}}{1-a}(1-x_1)\right\} + \right.$$

$$\left. + A - B\frac{(1-a)^{\mathrm{Re}+1}}{\mathrm{Re}+1}\right] = c_{11}E.$$

С учетом этого зависимость циркуляции тангенциальной скорости от радиуса в зоне 3 имеет следующий вид:

$$\Pi_3 = c_{11}B\frac{(x-a)^{\mathrm{Re}+1}}{\mathrm{Re}+1} + c_{11}E.$$

Для Π_3 имеется еще одно граничное условие

$$x \to \infty, \quad \Pi \to 1,$$

из которого находим

$$c_{11} = \frac{1}{E}.$$

Таким образом, получено распределение циркуляции по радиусу

$$\Pi = \frac{1}{E}(h_0 + bx)^{\frac{\mathrm{Re}\gamma}{b}+1} - \frac{1}{E}h_0^{\frac{\mathrm{Re}\gamma}{b}+1}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant x_1,$$

$$\Pi = \frac{1}{E}\frac{(\mathrm{Re}\,\gamma + b)(h_0 + bx_1)^{\mathrm{Re}}(1-a)}{\mathrm{Re}}\exp\left\{\frac{\mathrm{Re}}{1-a}(x - x_1)\right\} + \frac{A}{B},$$

$$x_1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{7.5}$$

$$\Pi = \frac{B}{E}\frac{(x-a)^{\mathrm{Re}+1}}{\mathrm{Re}+1} + 1, \qquad x \geqslant 1.$$

Поскольку в данной работе производится сравнение с результатами, полученными Х. А. Эйнштейном и Х. Ли, то определенный интерес представляет нахождение решения для случая, когда $a = 0$, но с вычислением неизвестных констант интегрирования по изложенной выше методике, так как в модели Эйнштейна и Ли в качестве

граничного условия предполагалось, что величина циркуляции известна на некотором радиусе.

Найдем распределение циркуляции тангенциальной скорости для случая, когда $a = 0$.

Зона 1: $0 \leqslant x \leqslant 1$, $q = x$, $h = 1$.

Решением уравнения (7.4) в этой зоне является функция

$$\Pi_1 = c_{11} \exp(\mathrm{Re}\, x) + c_{12}.$$

Для нахождения константы интегрирования c_{12} подставим полученное выражение в следующее граничное условие:

$$x = 0, \quad \Pi_1 = 0,$$

откуда находим $c_{21} = -c_{11}$, т. е. выражение для Π_1 и ее производной Π_1' можно записать как

$$\Pi_1 = c_{11}[\exp\{\mathrm{Re}\, x\} - 1],$$

$$\Pi_1' = c_{11} \mathrm{Re} \exp(\mathrm{Re}\, x).$$

Зона 2: $x \geqslant 1$, $q = 1$, $h = 1$.

Решением уравнения (6.4) в этой зоне является функция

$$\Pi_2 = c_{12} x^{\mathrm{Re}+1} + c_{22}.$$

Константы интегрирования вычисляем из условий $\Pi_2 = \Pi_1$, $\Pi_2' = \Pi_1'$ при $x = 1$:

$$c_{12} = c_{11} \frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Re}+1} \exp(\mathrm{Re}),$$

$$c_{22} = c_{11}\left[\frac{\exp(\mathrm{Re})}{\mathrm{Re}+1} - 1\right].$$

Поэтому выражение для циркуляции имеет вид

$$\Pi_2 = c_{11} \frac{\mathrm{Re}\exp(\mathrm{Re})}{\mathrm{Re}+1} x^{\mathrm{Re}+1} + c_{11}\left[\frac{\exp(\mathrm{Re})}{\mathrm{Re}+1} - 1\right].$$

Для нахождения c_{11} воспользуемся граничным условием $x \to \infty$, $\Pi_2 \to 1$, откуда получим

$$c_{11} = \frac{\mathrm{Re}+1}{\exp(\mathrm{Re}) - \mathrm{Re} - 1}.$$

Таким образом, общим решением основного уравнения для случая $a = 0$ является функция

$$\Pi = \frac{\mathrm{Re}+1}{\exp(\mathrm{Re}) - \mathrm{Re} - 1}[\exp(\mathrm{Re}\, x) - 1], \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{7.6}$$

$$\Pi = \frac{\mathrm{Re}\exp\{\mathrm{Re}\}}{\exp(\mathrm{Re}) - \mathrm{Re} - 1} x^{\mathrm{Re}+1} + 1, \qquad x \geqslant 1.$$

Зависимости циркуляции и тангенциальной скорости от радиуса, построенные по формулам (7.5) и (7.6) для различных значений ве-

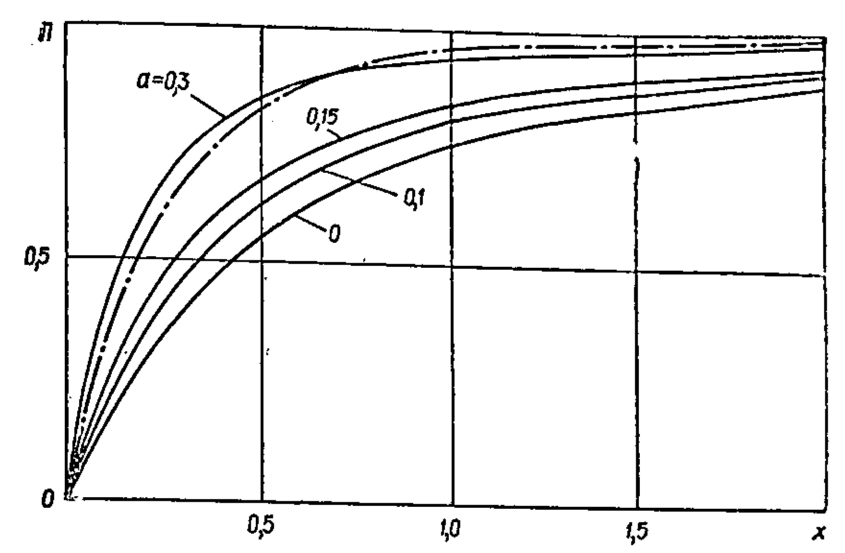


Рис. 7.2. Зависимость циркуляции вращательной скорости П от радиуса x, построенная по формулам (7.5) и (7.6) при $\mathrm{Re}=-2$; $n=m=1$, $h_0=0.2$ (—·—·— $\mathrm{Re}=-3$, $a=0{,}1$).

личин a и Re, изображены на рис. 7.2 и 7.3. Они показывают, что с увеличением a наблюдаемое уменьшение циркуляции по мере приближения к оси вращения замедляется, а тангенциальная скорость увеличивается, при этом чем больше $|\mathrm{Re}|$, тем меньше область резкого уменьшения величины циркуляции. С увеличением $|\mathrm{Re}|$ и a максимум вращательной скорости сдвигается к оси вращения, причем для всех значений $|\mathrm{Re}|$ и a величина вращательной скорости меньше, чем вычисленная по формуле $U_\varphi = \frac{\Gamma_0}{r}$, что подтверждается экспериментально [1, 121, 144].

Полученные в результате расчета данные позволяют уточнить физическую картину движения жидкости, соответствующую модели Х. А. Эйнштейна и Х. Ли. По этой модели вращательное движение жидкости поддерживается радиальным течением. Уменьшение циркуляции с уменьшением радиуса вызвано сначала влиянием вязкости (в области $x \geqslant 1$), а затем стоком жидкости в осевом направлении. Радиальная скорость в этом случае может быть оценена как $\frac{Q_1}{2\pi r l}$; это означает, что радиальная скорость изменяется по радиусу так же, как и расход в радиальном направлении, вследствие принятого в модели постоянства l. В реальных же условиях из-за того, что l является функцией радиуса, радиальная скорость (а значит, и вращательные скорости) зависит уже не только от радиального расхода, но и от величины l, т. е. от профиля воздушного ядра вихревой воронки.

Результаты проведенного расчета показывают, что влияние понижения уровня свободной поверхности заключается в том, что оно

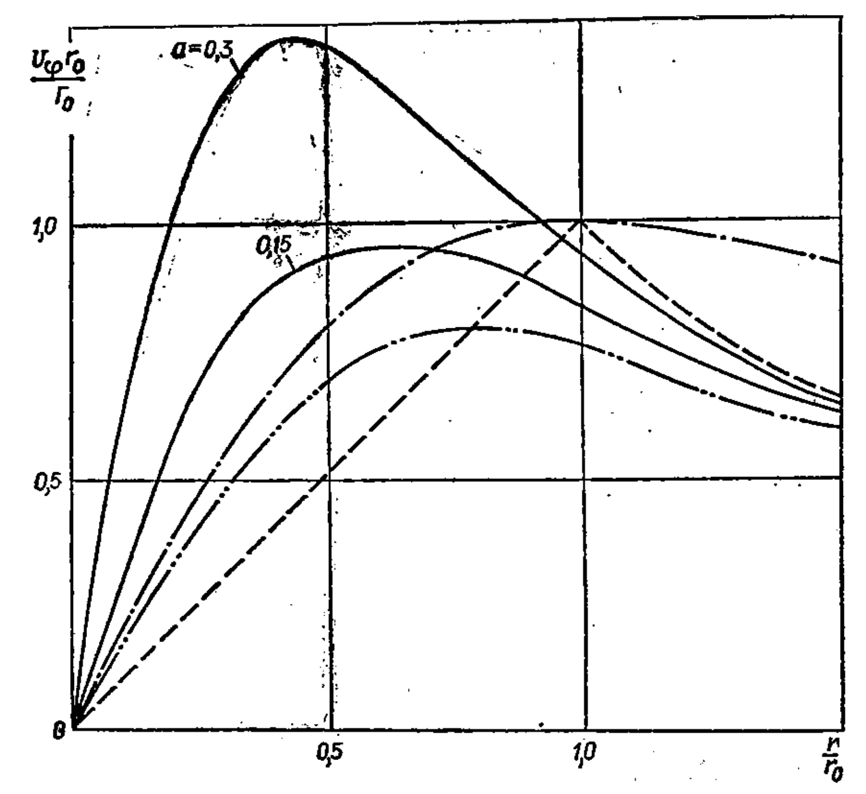


Рис. 7. 3. Зависимость вращательной скорости жидкости $\frac{U_\varphi r_0}{\Gamma_0}$ в вихревой воронке от радиуса $\frac{r}{r_0}$ при $\mathrm{Re}=-2$, $h_0=0{,}2$ (— — — — модель А. Гибсона [35], — • — • — • —аппроксимационная зависимость М. Ш. Марголина [1], — •• — •• — •• — модель Х. А. Эйнштейна и Х. Ли [151]).

компенсирует потери момента количества движения, вызванные вязкостной диссипацией энергии и осевым стоком жидкости. При этом наличие воздушного ядра вихревой воронки в реальном течении приводит к тому, что величины вращательных скоростей, рассчитанные с учетом понижения уровня свободной поверхности, могут быть значительно больше, чем рассчитанные по модели Х. А. Эйнштейна и Х. Ли (см. рис. 7.3).

Известно, что при каждом динамическом вращении жидкости образуется область так называемой вихревой нити [90], в которой жидкость вращается с некоторой постоянной угловой скоростью. Полученная в результате расчета зависимость тангенциальной компоненты скорости от радиуса показывает, что действительно вблизи оси вращения эта зависимость до определенного радиуса может рассматриваться приблизительно как линейная, т. е. угловая скорость вращения жидкости в этой области постоянна. Таким образом, с помощью предлагаемого способа расчета тангенциальных скоростей можно найти как радиус вихревой нити, так и величину угловой скорости жидкости в приосевой области.

При расчете было принято, что при $x\to\infty$ $\Pi\to 1$, т. е. циркуляция вращательной скорости стремится к некоторой постоянной величине. Некоторые эксперименты подтверждают это. Однако в общем случае, как уже отмечалось в замечании о граничных условиях, дело обстоит не так просто. Граничные условия помимо прочего включают еще и геометрию течения. Поэтому для цилиндрического резервуара диаметром D условие $x\to\infty$ теряет как формальный, так и физический смысл, поскольку оно невыполнимо.

Следовательно, условие $x\to\infty$, $\Pi\to\infty$ можно ставить лишь в задачах о закрученном течении со свободной поверхностью для безграничного течения, т. е. когда $D\to\infty$ $\left(\text{или } \frac{D}{2r_0}\gg 1\right)$, или в задаче о естественном воронкообразовании. Возможно, существует такое D_*, что условие $x\to\infty$, $\Pi\to 1$ становится выполнимым для всех $D\geqslant D_*$.

Для цилиндрического резервуара с искусственной воронкой характерной циркуляцией, по-видимому, является входная циркуляция

$$\Gamma_{\text{вх}}=U_{\text{вх}}R_{\text{вх}}=\frac{4QR_{\text{вх}}}{\pi d_{\text{вх}}^2},$$

значит, в уравнениях движения $\Pi=\frac{U_\varphi r}{U_{\text{вх}}R_{\text{вх}}}$. При такой замене граничное условие $x\to\infty$, $\Pi\to 1$ заменяется другим: $x=x_{\text{вх}}$, $\left[x_{\text{вх}}=\left(\frac{R_{\text{вх}}}{r_0}\right)^2\right]$, $\Pi=\varepsilon$, где ε — коэффициент сохранения скорости, который может быть рассчитан по теоретической формуле [33] или по эмпирическим зависимостям [5, 105].

Распределение циркуляции вращательной скорости изменится следующим образом:

$$\Pi=c_{11}\left[(h_0+bx)^{\frac{\mathrm{Re}\gamma}{b}+1}-h_0^{\frac{\mathrm{Re}\gamma}{b}+1}\right],\qquad 0\leqslant x\leqslant x_1,$$

$$\Pi=c_{11}\frac{(\mathrm{Re}\,\gamma+b)\,(h_0+bx_1)^{\frac{\mathrm{Re}\gamma}{b}}\,(1-a)}{\mathrm{Re}}\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{\mathrm{Re}}{1-a}(x-x_1)\right\}+c_{11}A,\qquad x_1\leqslant x\leqslant 1,$$

$$\Pi=c_{11}\left[B\frac{(x-a)^{\mathrm{Re}+1}}{\mathrm{Re}+1}+E\right],\qquad x\geqslant 1.$$

Константа интегрирования c_{11}, найденная из условия $x=x_{\text{вх}}$, $\Pi=\varepsilon$, имеет вид

$$c_{11}=\frac{\varepsilon\,(\mathrm{Re}+1)}{B\,(x_{\text{вх}}-a)^{\mathrm{Re}+1}+E\,(\mathrm{Re}+1)}.$$

Важнейшим результатом проделанных вычислений является то, что аналитически можно получать зависимости поля вращательных скоростей жидкости в вихревой воронке от конструкции как закручивающего аппарата, так и всей системы в целом.

В расчете циркуляции скорости было использовано уравнение для тангенциальной компоненты скорости из системы уравнений Навье — Стокса, которые применимы в случае ламинарного режима течения жидкости. Как известно из практики, ламинарные течения встречаются довольно редко и для их реализации требуются определенные условия. Для случая искусственного воронкообразования в цилиндрическом резервуаре при тангенциальной подаче жидкости имеется несколько факторов, способствующих тому, что течение жидкости в вихревой воронке осуществляется в турбулентном режиме. К ним относятся наличие струи жидкости из входного патрубка, на которую набегает закрученный поток, а также вогнутая поверхность стенки цилиндрического резервуара.

Х. А. Эйнштейн и Х. Ли [151] показали, что в предположении о независимости вращения жидкости по глубине вихревой воронки второе уравнение из системы уравнений Рейнольдса для турбулентных течений имеет следующий вид:

$$U_r\frac{dU_\varphi}{dr}+\frac{U_\varphi U_r}{r}=\nu\left[\frac{d^2U_\varphi}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dU_\varphi}{dr}-\frac{U_\varphi}{r^2}\right]-\frac{\partial}{\partial r}\overline{U_r'U_\varphi'}-2\frac{\overline{U_r'U_\varphi'}}{r}. \tag{7.7a}$$

По аналогии с ламинарным течением

$$-\overline{U_r'U_\varphi'}=\nu_т r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{U_\varphi}{r}\right),$$

и это приводит к тому, что уравнение (7.7 *а*) становится таким же, как и основное уравнение (7.4) предлагаемого расчета в случае, когда $\nu_т$ постоянна. При этом в полученных формулах вместо кинематической вязкости жидкости ν нужно использовать величину эффективной вязкости $\nu_э=\nu+\nu_т$ [33].

§ 2. ПРОФИЛЬ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ВИХРЕВОЙ ВОРОНКИ

Приведем уравнение для радиальной компоненты скорости из системы уравнений Навье — Стокса для стационарного осесимметричного течения к безразмерному виду, делая следующие замены:

$$U_r=\frac{q}{2\pi\sqrt{x}\,h}\frac{Q_1}{r_0H},\quad U_\varphi=\frac{\Pi}{\sqrt{x}}\frac{\Gamma_0}{r_0}.$$

После несложных преобразований получим

$$\frac{dh}{dx}=\mathrm{Ko}^2\left(\frac{\Pi}{x}\right)^2-\frac{\mathrm{Fr}}{8}\left(\frac{r_0}{H}\right)^3\frac{d}{dx}\left(\frac{q^2}{xh^2}\right)-\frac{\mathrm{Fr}}{4\,\mathrm{Re}}\left(\frac{r_0}{H}\right)^3\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{q}{h}\right), \tag{7.7}$$

где $\mathrm{Ko}=\dfrac{\Gamma_0}{r_0\sqrt{2gH}}$ — число Колфа [170]; $\mathrm{Fr}=\dfrac{Q_1^2}{\pi^2 g r_0^5}$ — число Фруда и $\mathrm{Re}=\dfrac{Q}{4\pi\nu H}$ — радиальное число Рейнольдса.

Интегрируя полученное выражение с учетом того, что при $x\to\infty$ $h\to 1$, имеем

$$h=1-\mathrm{Ko}^2\int_x^\infty\left(\frac{\Pi}{x}\right)^2dx-\frac{\mathrm{Fr}}{8}\left(\frac{r_0}{H}\right)^3\frac{q^2}{xh^2}-\frac{\mathrm{Fr}}{4\,\mathrm{Re}}\left(\frac{r_0}{H}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{q}{h}\right). \tag{7.8}$$

Выражение (7.8) показывает, что профиль свободной поверхности жидкости в вихревой воронке определяется главным образом вращательным движением жидкости, поскольку два последних члена в выражении (7.8) имеют порядок $\left(\frac{r_0}{H}\right)^2\ll 1$ $\left(\mathrm{Fr}\sim\frac{H}{r_0}\right)$. Кроме того, выражение (7.8) позволяет установить, каким образом расход влияет на профиль свободной поверхности. Как известно [101], форма воздушного ядра вихревой воронки зависит не только от интенсивности вращения, но и от расхода. В выражении (7.8) члены, явно содержащие расход, малы. Поэтому влияние расхода на профиль свободной поверхности в основном косвенное, через радиальное число Рейнольдса, которое определяет распределение вращательных скоростей жидкости в вихревой воронке, формирующих, в свою очередь, профиль свободной поверхности.

Уравнение (7.8) составляет с основным уравнением вихревой воронки (7.4) систему уравнений. Поэтому из (7.4) можно найти $\frac{q}{H}$ и подставить в выражение (7.8)

$$h=1-\mathrm{Ko}^2\int_x^\infty\left(\frac{\Pi}{x}\right)^2dx-\frac{\mathrm{Fr}}{8}\left(\frac{r_0}{H}\right)^3x\left(\frac{\Pi''}{\Pi'}\right)^2-\frac{\mathrm{Fr}}{4\,\mathrm{Re}}\left(\frac{r_0}{H}\right)^3\frac{d}{dx}\left(\frac{x\Pi''}{\Pi'}\right). \tag{7.9}$$

Таким образом, зная распределение циркуляции вращательной скорости $\Pi(x)$ по радиусу x вихревой воронки, можно с помощью выражения (7.9) рассчитать профиль свободной поверхности жидкости в вихревой воронке.

В качестве искомого распределения циркуляции можно взять решение основного уравнения (7.4), которое, правда, содержит неизвестную величину h_0 в аппроксимации профиля воздушного ядра вихревой воронки.

Единственным известным способом расчета величины h_0 в настоящее время является способ с использованием модели А. Гибсона [35] и предположения, что радиус вихревой нити равен радиусу донного отверстия. Однако расчет по этому способу приводит к значительным погрешностям вследствие того, что в нем не учитывается влияние расхода, вязкости и кривизны свободной поверхности на распределение вращательной скорости. К тому же радиус вихревой нити в реальном течении намного меньше радиуса донного отверстия.

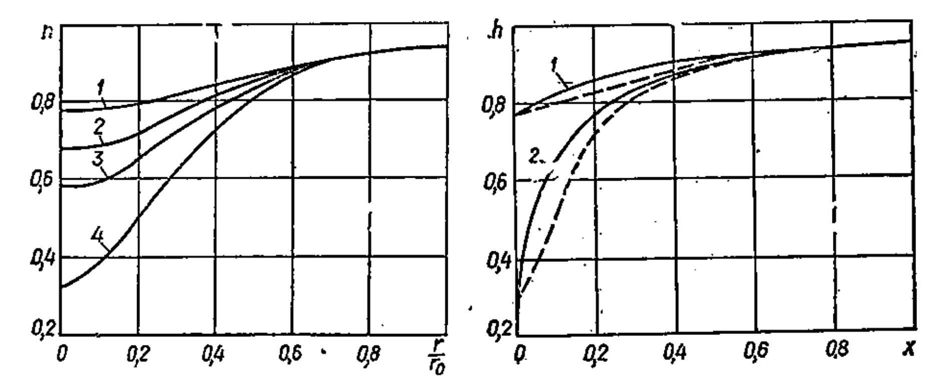


Рис. 7.4. Профиль свободной поверхности жидкости в вихревой воронке при различных Re:

1 — Re=—5; *2* — Re=—4; *3* — Re=—5; *4* — Re=—7; a=0,0566.

Рис. 7.5. Сравнение расчетного профиля свободной поверхности вихревой воронки в вязкой жидкости (сплошная линия) с профилем в идеальной жидкости:

1 — Re=—3; *2* — Re=—7.

Поэтому был разработан более точный способ нахождения величины h_0 с использованием метода последовательных приближений.

По начальному приближению h_{01} с помощью формул (7.5) вычисляем начальное значение Π_{01}. Затем, подставляя Π_{01} в уравнение (7.8), находим значение h в точке $x = 0$, т. е. второе приближение h_{02}. Процесс продолжается до тех пор, пока $|h_{0n} - h_{0n-1}| < \varepsilon_1$, где ε_1 — некоторое заданное малое число (в приведенных расчетах $\varepsilon_1 = 10^{-4}$). Как показали вычисления, этот процесс быстро сходится и не зависит от начального приближения h_{01}.

Таким образом, расчет профиля свободной поверхности жидкости в вихревой воронке производится следующим образом. Сначала с помощью метода последовательных приближений находим относительное понижение жидкости на оси вращения h_0. Затем, зная h_0, по формулам (7.5) определяем распределение циркуляции вращательной скорости по радиусу вихревой воронки $\Pi(x)$, которое, будучи подставленным в уравнение (7.9), дает возможность установить профиль свободной поверхности жидкости.

Разработанный способ расчета позволил получить интересные результаты. Было установлено, что профиль свободной поверхности сильно зависит от радиального числа Рейнольдса (рис. 7.4). Чем больше $|\mathrm{Re}|$, тем сильнее понижение уровня свободной жидкости вблизи оси вращения. Из этого, в частности, следует, что кривизна свободной поверхности для случая ламинарного режима течения жидкости в вихревой воронке должна быть значительно больше, чем для турбулентного.

Сравнение расчетных профилей свободной поверхности вихревой воронки в вязкой жидкости с профилем в идеальной (при тех же значениях a и h_0) приведено на рис. 7.5. Из рисунка видно, что расчетные точки располагаются выше кривой, полученной для идеальной жидкости. Это качественно совпадает с экспериментальными данными работы [161].

Такое расположение расчетных точек объясняется тем, что величина вращательной скорости жидкости вблизи оси вращения в реальной жидкости меньше, чем в идеальной, из-за влияния вязкости. Из результатов расчета также следует, что точка перехода гиперболического вида профиля воздушного ядра воронки в гиперболический для вязкой жидкости располагается ближе к оси вращения, чем для идеальной.

При изучении движения жидкости в вихревых воронках особый интерес представляет определение момента проникновения воздушного ядра вихревой воронки в донное отверстие, т. е. установление условий, при которых $h_0 = 0$.

Рассмотрим вихревую воронку в идеальной жидкости с соответствующим распределением вращательной скорости

$$\begin{cases} U_\varphi = \dfrac{\Gamma_0}{r}, & r \geqslant r_1, \\ U_\varphi = \dfrac{\Gamma_0}{r_1^2} r, & r \leqslant r_1. \end{cases}$$

Профиль свободной поверхности жидкости находим интегрированием уравнения

$$\frac{dgl}{dr} = \frac{U_\varphi^2}{r},$$

что приводит к следующим формулам:

$$\begin{cases} gl = gH - \dfrac{\Gamma_0^2}{2r^2}, & r \geqslant r_1, \\ gl = gl_0 + \dfrac{\Gamma_0^2}{2r_1^4} r^2, & r \leqslant r_1. \end{cases}$$

Величину l_0 можно найти из условия равенства gl в точке $r = r_1$

$$gl_0 = gH - \frac{\Gamma_0^2}{r_1^2},$$

или, что то же самое, в безразмерном виде

$$h_0 = 1 - \frac{\Gamma_0^2}{r_1^2 gH} = 1 - 2\frac{\Gamma_0^2}{r_0^2 2gH}\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2 = 1 - 2\mathrm{Ko}^2\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2.$$

Рассмотрим теперь, как влияет расход на проникновение воздушного ядра вихревой воронки в донное отверстие в идеальной жидкости.

Примем следующее распределение скоростей:

$$U_\varphi = \frac{\Gamma_0}{r}, \quad r \geqslant r_1, \qquad U_r = \frac{Q}{2\pi r H}, \quad r \geqslant r_0,$$

$$U_\varphi = \frac{\Gamma_0}{r_1^2} r, \quad r \leqslant r_1, \qquad U_r = \frac{Q}{2\pi r_0^2 H} r, \quad r \leqslant r_0.$$

Уравнение движения с учетом этого

$$\frac{d(gl)}{dr} = \frac{U_\varphi^2}{r} - \frac{d}{dr}\left(\frac{U_r^2}{2}\right).$$

Найдем профиль свободной поверхности в приосевой области. Для этого необходимо проинтегрировать уравнение движения последовательно в трех зонах:

1) $r \geqslant r_0$, $(r \to \infty,\ l_1 \to H)$

$$gl_1 = gH - \left(\frac{\Gamma_0^2}{2} - \frac{Q^2}{8\pi^2 H^2}\right)\frac{1}{r^2};$$

2) $r_1 \leqslant r \leqslant r_0$ $(r = r_0,\ l_1 = l_2)$

$$gl_2 = gH - \frac{\Gamma_0^2}{2r^2} - \frac{Q^2 r^2}{8\pi^2 r_0^4 H^2};$$

3) $0 \leqslant r \leqslant r_1$

$$gl_3 = gl_0 + \frac{\Gamma_0^2}{2r_1^4} r^2 - \frac{Q^2 r^2}{8\pi^2 r_0^4 H^2}.$$

Из условия $l_2 = l_3$ при $r = r_1$ находим, что

$$gl_0 = gH - \frac{\Gamma_0^2}{r_1^2}.$$

Получили, что в случае идеальной жидкости величина расхода не влияет на момент проникновения воздушного ядра вихревой воронки в донное отверстие, а высота жидкости на оси вращения определяется исключительно интенсивностью ее вращения.

В момент, когда воздушное ядро вихревой воронки достигает донного отверстия, $h_0 = 0$. Отсюда можно найти критическое число Колфа

$$\text{Ko}_* = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{r_1}{r_0}.$$

В модели А. Гибсона $r_1 = r_0$, следовательно, воздушное ядро воронки проникает в донное отверстие при

$$\text{Ko}_* \cong 0{,}71.$$

Экспериментальное же значение критического числа Колфа для вихревой воронки, полученное в экспериментах Стивенса и Колфа [161], равно $\text{Ko}_* \cong 0{,}25$, что значительно меньше вычисленного для модели А. Гибсона. Такое расхождение вызвано в первую очередь тем, что в реальной вихревой воронке радиус вихревой нити значительно меньше радиуса донного отверстия, что подтверждают и данные теоретического расчета, приведенного в § 1.

Распределение вращательной скорости, приведенное на рис. 7.3, позволяет приблизительно определить размеры вихревой нити $\frac{r_1}{r_0} \cong 0{,}25$ для случая: $\text{Re} = -2$, $a = 0{,}15$. Следовательно, критическое число Колфа для такой воронки $\text{Ko}_* = \frac{\sqrt{2}}{2} 0{,}25 = 0{,}18$, что значительно ближе к значению экспериментального Ko_*.

В реальной жидкости момент проникновения воздушного ядра вихревой воронки в донное отверстие будет зависеть не только от числа Колфа, но и от других параметров, входящих в уравнение (7.7). Предложенный выше итерационный метод расчета профиля свободной поверхности позволяет также рассчитать величину h_0, а значит, дает возможность теоретически определять условия, когда $h_0 = 0$. Согласно проведенным расчетам проникновение воздушного ядра воронки зависит от чисел Re и a, причем с ростом величин $|\text{Re}|$ и Ko с некоторого момента происходит резкое понижение высоты жидкости на оси вращения (рис. 7.6, *а*, *б*).

Анализ уравнения (7.8) показывает, что должна существовать критериальная зависимость, например вида

$$\text{Re} = f\left(\text{Ko},\ \text{Fr}\left(\frac{r_0}{H}\right)^3\right),$$

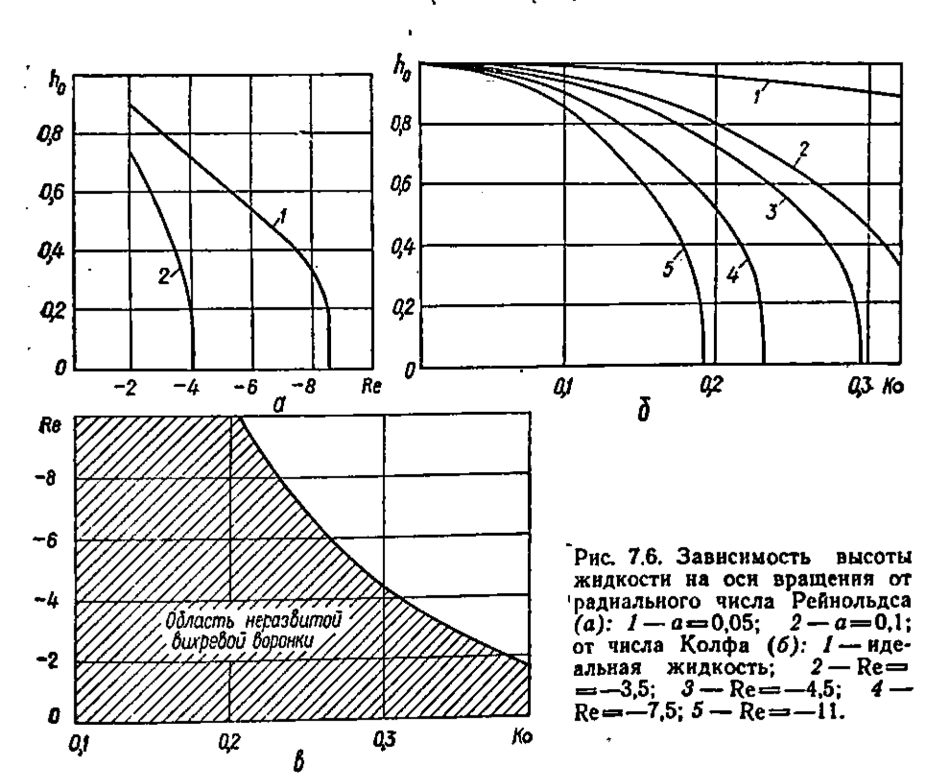


Рис. 7.6. Зависимость высоты жидкости на оси вращения от радиального числа Рейнольдса (*а*): *1* — $a = 0{,}05$; *2* — $a = 0{,}1$; от числа Колфа (*б*): *1* — идеальная жидкость; *2* — Re = −3,5; *3* — Re = −4,5; *4* — Re = −7,5; *5* — Re = −11.

которая показывает связь между безразмерными параметрами в момент проникновения воздушного ядра воронки в донное отверстие.

Рассмотренный метод расчета позволяет установить такую зависимость. Она приведена на рис. 7.6, *в* и дает возможность теоретически определять область течений жидкости с неразвитой вихревой воронкой.

Помимо данных работы [161] условия проникновения воздушного ядра воронки получали экспериментальным путем и другие исследователи. Т. М. Василишин [28] в результате опытов на спиральной камере установил, что воронка проникает в донное отверстие при выполнении условия $\frac{4r_0^2 g}{U_{ср}\nu} = 500 \left(U_{ср} = \frac{Q}{\pi r_0^2}\right)$, что эквивалентно в принятых в настоящей главе обозначениях следующему: $\frac{16}{\pi}\frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Fr}}\frac{H}{r_0} = 500$. В работе [98] исходя из общей концепции об определяющем влиянии вращательного числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_\varphi = \frac{U_\varphi r}{\nu}$ при воронкообразовании условием замыкания воронки в цилиндрическом резервуаре предложено считать $\mathrm{Re}_\varphi = 3000 \div 3500$. Даггет и Келегэн [150] приводят графики для определения момента проникновения, в которых связывается высота жидкости в камере и число Колфа для различных чисел Рейнольдса $\mathrm{Re} = \frac{Q}{r_0\nu}$.

Несмотря на довольно большое число работ по этому вопросу, полученные результаты характеризуют явление в каждом случае лишь с какой-то одной стороны. В предлагаемых зависимостях главную роль играют либо вязкие эффекты, либо интенсивность крутки, либо весомость жидкости, в то время как на самом деле все эти факторы воздействуют на течение одновременно. Кроме того, полученные зависимости затруднительно использовать на практике. Так, формула Т. М. Василишина справедлива только для спиральных камер, а на практике чаще используются цилиндрические. Условия других исследователей содержат, как правило, величины, которые можно найти только с помощью эксперимента. Например, возникает вопрос о том, как определить величину Γ_0, которая входит в число Колфа, по известным характеристикам закручивающего аппарата (при искусственном воронкообразовании) или, что еще сложнее, для случая естественного воронкообразования. В то же время очевидно, что при одних и тех же конструктивных параметрах и одной и той же жидкости условия проникновения воздушного ядра вихревой воронки в донное отверстие будут одинаковыми. Поэтому представляет интерес получение такой эмпирической зависимости, в которую входят только заранее определяемые параметры, такие, как конструктивные размеры и расход.

Для этого была изготовлена установка, представляющая собой цилиндрический сосуд диаметром $D = 0{,}105$ м с круглым отверстием в дне, в которой через цилиндрический патрубок $d_{вх} = (1{,}0 \div 2{,}68)\cdot 10^{-2}$ м тангенциально подавалась вода. Истечение жидкости из цилиндрического сосуда происходило в трубу диаметром $2r_0 =$

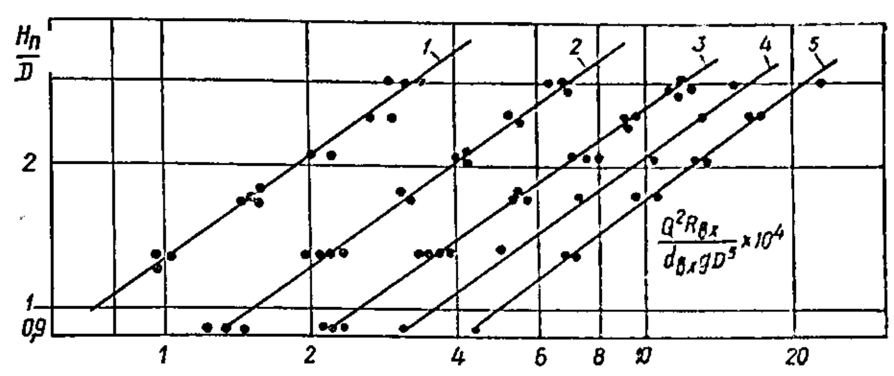


Рис. 7.7. Зависимость высоты жидкости H_n/D в момент проникновения воздушного ядра в донное отверстие от параметра $\frac{Q^2R_{вх}}{d_{вх}gD^5}$ ($2r_0$, см):

1 — 1,35; *2* — 1,72; *3* — 2,03; *4* — 2,36; *5* — 2,68 ● — эксперимент.

$= (1{,}35 \div 2{,}68)\cdot 10^{-2}$м, на конце которой устанавливался вентиль, с помощью которого и вентиля на входе регулировалась величина расхода через систему. Расход воды измерялся расходомером ДР20-1, подсоединенным к электронному счетчику импульсов. Зависимость высоты жидкости в момент проникновения воздушного ядра вихревой воронки в донное отверстие H_n от параметра $\frac{Q^2R_{вх}}{d_{вх}gD^5}$ при различных диаметрах выпускного отверстия приведена на рис. 7. 7.

Анализ полученных данных позволил установить, что при постоянных диаметре выпускного отверстия и высоте жидкости в сосуде проникновение воздушного ядра вихревой воронки зависит только от параметра $\frac{Q^2R_{вх}}{d_{вх}gD^5} = \frac{U_{вх}^2 d_{вх}R_{вх}}{gD^5}$. Как следует из рисунка, эта зависимость носит степенной характер. При постоянном $\frac{Q^2R_{вх}}{d_{вх}gD^5}$ величина H_n зависит обратно пропорционально от площади выпускного отверстия.

Экспериментальные данные аппроксимируются следующей зависимостью:

$$\left(\frac{r_0}{H}\right)^3 \mathrm{Fr}^2 = 20{,}4\cdot 10^{-5}\left(\frac{d_{вх}}{2R_{вх}}\right)^2\left(\frac{D}{2r_0}\right)^{3/2}. \qquad (7.10)$$

Впоследствии справедливость зависимости (7.10) была подтверждена при экспериментах еще на двух однотипных, но разного масштаба, установках. Следует особо отметить, что формула (7.10) получена для воды и моделей одинаковой гладкости (оргстекло). Поскольку наличие шероховатостей заметно влияет на степень закрученности потока, то для систем с отличной от имевшейся в опытах шероховатостью следует ожидать, что эмпирические коэффициенты в формуле (7.10) будут другими.

В результате опытов было также установлено, что для определения момента проникновения воздушного ядра воронки в донное отверстие в системе с несколькими входными патрубками можно использовать зависимость (7.10), полученную для системы с одним входным патрубком. Для этого необходимо вычислить по суммарной площади входных патрубков $S_{вх}$ эквивалентный радиус входного патрубка $r_{вх} = \sqrt{S_{вх}/\pi}$ и подставить в формулу (7.10).

Вернемся к уравнению (7.7), которое позволяет сделать некоторые выводы в таком важном в практическом отношении вопросе, как моделирование движения жидкости в вихревой воронке. Довольно значительное число проведенных исследований посвящено выявлению критериев, от которых зависит коэффициент расхода, т. е. выяснению условий, при которых коэффициенты расхода натуры и модели одинаковы. Но при одном и том же коэффициенте расхода распределения скоростей могут быть различными. Новые же запросы практики требуют выяснения условий подобия всей гидродинамической картины течения. Например, при использовании вихревой воронки в суспензионном литье определяющую роль играет профиль свободной поверхности жидкого металла, а это, в свою очередь, требует выяснения условий, при которых профили воздушного ядра вихревой воронки в натуре и лабораторной модели будут подобны.

Из уравнений движения жидкости в вихревой воронке (7.4) и (7.7) следует, что для подобия течения необходимо, чтобы величины чисел $\mathrm{Ko} = \frac{\Gamma_0}{r_0\sqrt{2gH}}$, $\mathrm{Re} = \frac{Q_1}{4\pi\nu_т H}$, $\mathrm{Fr} = \frac{Q_1^2}{\pi^2 r_0^5 g}$ для модели были такими же, как и для натуры ($\nu_т$ — величина постоянной турбулентной вязкости [33]).

Следовательно, если течение в натуре имеет параметры $\nu_{тн}$, $Q_н$, $H_н$, $r_{0н}$, $\Gamma_{0н}$, то при моделировании те же параметры в модели должны быть следующими: $\Gamma_{0м} = \Gamma_{0н}\left(\frac{r_{0м}}{r_{0н}}\right)^{3/2}$, $\nu_{тм} = \nu_{тн}\left(\frac{r_{0м}}{r_{0н}}\right)^{3/2}$, $H_м = H_н\frac{r_{0м}}{r_{0н}}$, $Q_м = Q_н\left(\frac{r_{0м}}{r_{0н}}\right)^{5/2}$.

Легко показать, что при свободном истечении жидкости через отверстие в дне последнее условие будет выполняться автоматически. Наиболее трудно выполнимо второе условие, так как не только неизвестно, как получить на модели нужную турбулентную вязкость, но и вообще нет никаких данных о турбулентной структуре течения жидкости в вихревых воронках.

Из уравнения (7.7) следует, что подобие профилей воздушного ядра вихревой воронки определяется теми же критериями, что и подобие всего течения. Поэтому можно рекомендовать следующий удобный для практики метод моделирования течения при наличии вихревой воронки. Зафиксировав в натуре профиль свободной поверхности, уменьшаем (увеличиваем) его в маштабе $\frac{r_{0н}}{r_{0м}}$ и затем на модели подбираем при $\frac{H_м}{H_н} = \frac{r_{0м}}{r_{0н}}$ такой режим, чтобы профиль воздушного ядра образующейся в модели вихревой воронки совпал с перестроенным с натуры.

§ 3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ВИХРЕВОЙ ВОРОНКЕ. СРАВНЕНИЕ ТЕОРИИ И ЭКСПЕРИМЕНТА

В опубликованных работах, посвященных экспериментальному изучению поля скоростей жидкости в вихревой воронке, в основном главное внимание уделяется исследованию распределения вращательных скоростей по радиусу и глубине жидкости развитой вихревой воронки, так как образование вихревой воронки и ее основные свойства обусловлены именно вращением жидкости.

Первые результаты по измерению поля вращательных скоростей получил А.Х. Халпахчян [121], который установил, что распределение U_φ по радиусу отличается от распределения в идеальной жидкости $U_\varphi = \frac{\Gamma_\phi}{r}$, причем чем ближе к оси вращения рассматриваемая область, тем больше разница между вращательной скоростью, измеренной экспериментально, и рассчитанной по формуле $U_\varphi = \frac{\Gamma_\phi}{r}$.

Затем В. С. Фокеев [118], использовав шаровой зонд, провел измерения вращательных и радиальных скоростей в воронке, образовавшейся за щитом-завихрителем в гидравлическом лотке. Он показал, что величина вращательной скорости увеличивается по мере приближения ко дну лотка, радиальная скорость при этом уменьшается, а вихревая воронка засасывает жидкость из слоев, расположенных у свободной поверхности. Распределение вращательных скоростей по глубине жидкости при искусственном воронкообразовании также получили В. И. Поликовский и Р. Г. Перельман [101], применявшие в опытах стробоскопирование вертушки и трубки Пито специальной формы.

Оригинальный оптический метод определения скорости жидкости в вихревой воронке предложили Седдон и Анвар [160]. Применение этого метода позволили Анвару [145] получить поле вращательных скоростей и распределение радиальной скорости жидкости по радиусу. Из его результатов следует, что тангенциальная компонента скорости не изменяется по глубине жидкости.

Даггет и Келегэн [150] измерили поле вращательных и радиальных скоростей при вынужденном воронкообразовании с помощью микротурбины. По полученному распределению радиальных скоростей численно из уравнения неразрывности они нашли поле осевых скоростей и установили, что тангенциальная скорость изменяется лишь в придонной области, в которой наблюдается рост радиальной скорости по мере приближения ко дну.

Нужно также отметить метод визуализации движения жидкости в вихревой воронке, предложенный С. М. Матинян [87]. Он заклю-

чается в том, что в поток жидкости вводится миниатюрная электролампочка нейтральной плавучести на тонких гибких проводниках, движение которой затем регистрируется фото- и киноаппаратурой через стробоскоп.

Если распределения вращательных скоростей, полученные опытным путем разными исследователями, подобны между собой, то распределения циркуляции вращательной скорости по радиусу, построенные по этим данным, имеют принципиальные различия. Так, по измерениям А. Х. Халпахчяна [121] и Анвара [145] циркуляция тангенциальной скорости сначала растет, а затем уменьшается с увеличением радиуса. По данным А. Д. Альтшуля и М. Ш. Марголина [1], Даггета и Келегэна [150], имеет место постоянство циркуляции по радиусу или начиная с некоторого радиуса.

Анализ литературных источников показал, что помимо имеющихся противоречий и явной недостаточности данных по распределению вращательных скоростей существует значительное число различных аспектов явления воронкообразования, которые еще не исследованы.

Например, нет данных по распределению циркуляции тангенциальной скорости в области, расположенной вблизи оси вращения жидкости. В то же время такие данные необходимы при построении более точных теоретических моделей течения жидкости в вихревой воронке, так как именно в этой области обычно проводится их уточнение.

Не изучено влияние различных факторов на поле вращательных скоростей, таких, как высота жидкости в резервуаре и геометрия течения. В имеющихся работах эксперименты проведены для случая закрученного истечения жидкости через малые отверстия в дне $\frac{2r_0}{D} < 0{,}1$, в то время как на практике используемое отношение может достигать величины 0,3 [61].

Определенный интерес представляет сравнение экспериментальных данных для условий, принятых в теоретической модели Х. А. Эйнштейна и Х. Ли, т. е. когда свободная поверхность жидкости плоская, с результатами, следующими из этой модели.

Отметим, что использовавшиеся в экспериментах устройства для измерения скорости жидкости обладают целым рядом недостатков. Так, вертушки, какова бы ни была их конструкция, имеют прежде всего весьма значительные размеры, т. е. плохое пространственное разрешение. Угловая скорость вращения вертушки не равна угловой скорости потока в данной точке, так как поток воздействует не только на лопатки вертушки, но и на несущие плечи. Если вертушка сделана без плеч, то она осредняет вращение жидкости по глубине.

Применение различных зондов и микротурбин приводит к возмущению потока, вследствие чего сильно снижается точность измерения скорости, а применение оптических методов (например, метода светового ножа) затруднено наличием воздушного ядра вихревой воронки как оптической неоднородности.

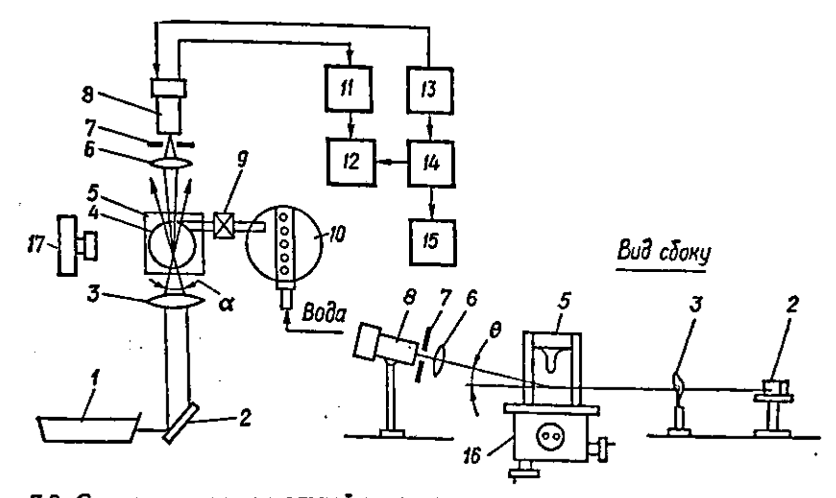


Рис. 7.8. Схема экспериментальной установки:

1 — лазер, *2* — делитель, *3* — фокусирующая линза, *4* — цилиндрический резервуар, *5* — прямоугольный резервуар, *6* — фотообъектив, *7* — диафрагма, *8* — ФЭУ, *9* — входной вентиль, *10* — ресивер, *11* — усилитель, *12* — анализатор спектра, *13* — источник питания, *14* — генератор, *15* — электронный частотомер, *16* — кородинатник, *17* — фотоаппарат.

Поэтому для исследования поля скоростей жидкости в вихревой воронке был выбран метод лазерной анемометрии, который позволяет, не вступая в механический контакт с измеряемой средой, с большим пространственным разрешением (доли миллиметра) и большей степенью точности (относительная погрешность измерений может быть доведена до 0,1 %) измерять скорость движения жидкой среды. При этом, исходя из условий задачи, была выбрана дифференциальная схема ЛДИС, которая обладает определенными достоинствами: независимостью частоты допплеровского сигнала от направления наблюдения и независимостью ширины спектра сигнала от апертуры, собирающей рассеянный свет линзы.

Схема экспериментальной установки изображена на рис. 7.8. В качестве источника когерентного монохроматического излучения использовался He — Ne лазер ЛГ-38 ($\lambda = 0{,}63$ мк) с блоком питания СБП-16М, работающий в одномодовом режиме (мода TEM_{00q}). Лазерный луч расщеплялся делителем *2* на два пучка приблизительно равной интенсивности, расположенных в горизонтальной плоскости. Полученные пучки фокусировались линзой *3*, фокусное расстояние которой выбиралось в зависимости от величины измеряемой скорости.

Рассеянный частицами свет собирался приемной системой, состоявшей из фотообъектива *6* («Мир-1»), диафрагмы *7* диаметром 0,1 мм и фотоэлектронного умножителя *8* типа ФЭУ-79. Конструктивно все перечисленные элементы были объединены в один блок, расположенный под углом к плоскости хода лазерных пучков (угол $\theta \cong 10°$).

Для питания фотоумножителя применялся стабилизированный выпрямитель ИВН-1. Электрический сигнал с ФЭУ усиливался широко-

полосным усилителем УЗ-7А и подавался на анализатор спектра С4-12. Допплеровская частота рассеянного света определялась путем сравнения полученного сигнала с эталонным (генератор Г3-35) с помощью электронно-счетного частотомера. Наблюдение и контроль допплеровского сигнала производились визуально на экране осциллографа С1-54.

Гидравлическая часть экспериментальной установки представляла собой цилиндрический резервуар *4* ($D = 8 \cdot 10^{-2}$ м), в который тангенциально через кран *9* из ресивера *10*, служащего для поддержания постоянства расхода, подавалась вода из отстойного бака. Сток воды осуществлялся через центрально расположенное круглое отверстие в дне резервуара в трубу, на выходе которой был установлен выпускной вентиль. Регулировка расхода воды через систему и высоты жидкости в резервуаре *4* производилась с помощью крана *9* и выпускного вентиля. Для уменьшения влияния кривизны исследуемого объема на ход лазерных пучков цилиндрический резервуар *4* был помещен в прямоугольный сосуд *5*, наполненный дистиллированной водой. Конструкция установки позволяла менять диаметры входного патрубка ($d_{вх} = (1{,}0 \div 2{,}0)\ 10^{-2}$ м) и выпускного отверстия ($2r_0 = (1{,}5 - 2{,}7)\ 10^{-2}$ м). Вся гидравлическая часть была смонтирована на координатнике, при помощи которого производилось ее перемещение в трех направлениях относительно лазерных пучков с шагом $0{,}05 \cdot 10^{-3}$ м.

Проверка настройки и работы ЛДИС осуществлялась на затопленной струе воды, вытекавшей из цилиндрической трубки в исследовавшийся резервуар.

В опытах использовалась водопроводная вода, которая заливалась в бак из нержавеющей стали и отстаивалась в течение нескольких дней для дегазации.

Определение расхода воды через гидравлическую систему осуществлялась мерной емкостью, время наполнения которой замерялось секундомером. Относительная погрешность измерения расхода составляла менее 2 %.

При каждом измерении эпюр компонент скорости движения воды профиль воздушного ядра вихревой воронки фиксировался фотоаппаратом «Киев-10».

Различными наблюдениями установлено, что зачастую истечение закрученного потока жидкости через круглое отверстие в дне является пульсирующим. А. Х. Халпахчян объяснял [120] это тем, что вблизи боковых стенок резервуара могут генерироваться крупномасштабные вихри, которые затем, перемещаясь под действием радиального течения к выпускному отверстию, в момент попадания в выпускное отверстие ослабляют интенсивность вихревой воронки.

А. Я. Милович считал [90], что истечение закрученного потока через круглое отверстие в дне для случая сильно развитой воронки всегда должно быть пульсирующим. Это объясняется тем, что степень закрученности потока и расход жидкости через систему взаимосвязаны. Отсюда получается следующая схема пульсационного течения: $Q\uparrow \rightarrow \Gamma\uparrow$; $\Gamma\uparrow \rightarrow Q\downarrow$, $Q\downarrow \rightarrow \Gamma\downarrow$, $\Gamma\downarrow \rightarrow Q\uparrow$ и т. д. Таким образом, такое течение всегда должно быть пульсирующим.

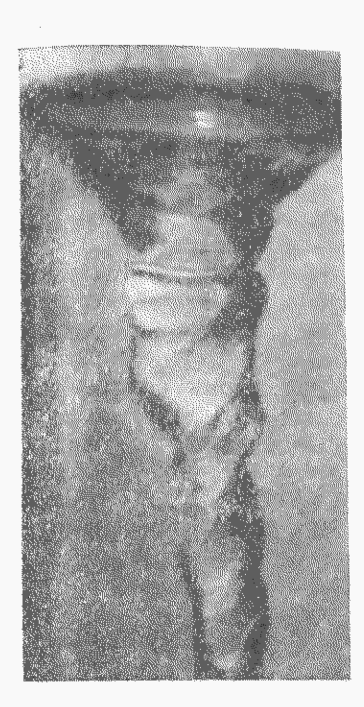




Рис. 7.10. Вид неустойчивого течения жидкости в вихревой воронке.

Рис. 7.9. Вид неустойчивого течения жидкости в вихревой воронке.

В последнее время было проведено большое число исследований по устойчивости различных вращательных движений жидкости. М. А. Гольдштик изучал [33] устойчивость течения жидкости в «сложном вихре» и получил некоторые условия устойчивости течения.

Наблюдения за течением жидкости в вихревой воронке позволили установить следующие особенности течения. При определенных условиях свободная поверхность жидкости в области воздушного ядра вихревой воронки носила волнистый характер, изменяющийся во времени (рис. 7.9). Существует также такой режим течения, когда волнистый характер свободной поверхности жидкости не изменялся во времени.

В других случаях наблюдалась сильная неустойчивость уровня жидкости в резервуаре (рис. 7.10), когда плоскость свободной поверхности жидкости располагалась под некоторым углом к горизонту и вращалась вокруг вертикальной оси вращения, проходящей через центр выпускного отверстия. Такой режим наблюдался только при определенных конструктивных параметрах и одном и том же расходе жидкости. Само явление напоминает явление резонанса. При постепенном увеличении величины расхода через систему в какой-то момент времени начинались сильные колебания уровня жидкости в чаше, которые затем исчезали с дальнейшим увеличением расхода.

Следующим типом наблюдавшейся неустойчивости течения жидкости в вихревой воронке являлись колебания глубины воздушного ядра, заключавшиеся в попеременном удлинении и укорачивании хвостовой части воздушного ядра и составлявшие не более 5 % его длины.

Полученные данные свидетельствуют о том, что неустойчивость течения жидкости в вихревой воронке, скорее всего, вызвана волновыми процессами, происходящими во вращающейся жидкости.

Устойчивость вихревой воронки в определенной степени связана с круткой потока. Опыты показывают, что неустойчивое течение жидкости наблюдается в основном при слабой степени закрученности потока. Чем сильнее вращение жидкости, тем оно устойчивее (за исключением явления «резонанса», которое может наблюдаться и при значительной крутке потока).

Сравнение наших данных наблюдения с данными других ученых показало, что одной из причин неустойчивости вращательного движения жидкости при наличии вихревой воронки может быть односторонний подвод жидкости. Аналогичные же исследования, проведенные при закручивании потока с помощью нескольких входных патрубков, определили большую устойчивость вихревой воронки.

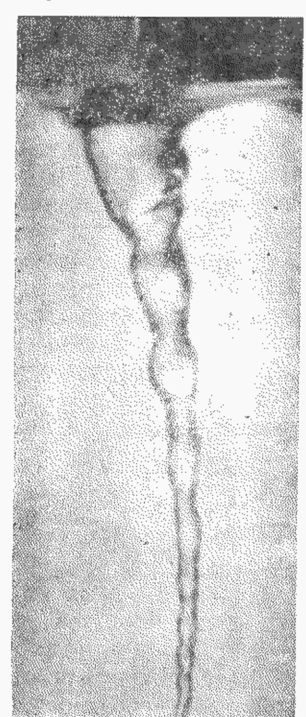


Рис. 7.11. Искривление воздушного ядра в вихревой воронке.

Помимо неустойчивости течения жидкости в вихревой воронке наблюдалось также неустойчивое образование воздушного ядра, которое при некоторых условиях дробилось в хвостовой части, а пузырьки воздуха засасывались в выпускное отверстие. Такое дробление воздушного ядра возникает при больших расходах (большие осевые скорости), малой крутке потока и небольшом относительном диаметре выпускного отверстия ($\frac{2r_0}{D} \leqslant 0{,}1$). Физическая картина явления указывает на то, что при образовании сильно вытянутого воздушного ядра вихревой воронки, которое имеет малые поперечные размеры, заметную роль начинают играть силы поверхностного натяжения.

Следует отметить влияние высоты жидкости на характер течения. В некоторых случаях при больших относительных высотах жидкости ($\frac{H}{D} \approx 3$) наблюдался сильный изгиб воздушного ядра вихревой воронки (рис. 7.11), вызванный, вероятно, односторонним подводом воды. При дальнейшем повышении высоты жидкости воздушное ядро вихревой воронки при достижении определенной высоты практически исчезает.

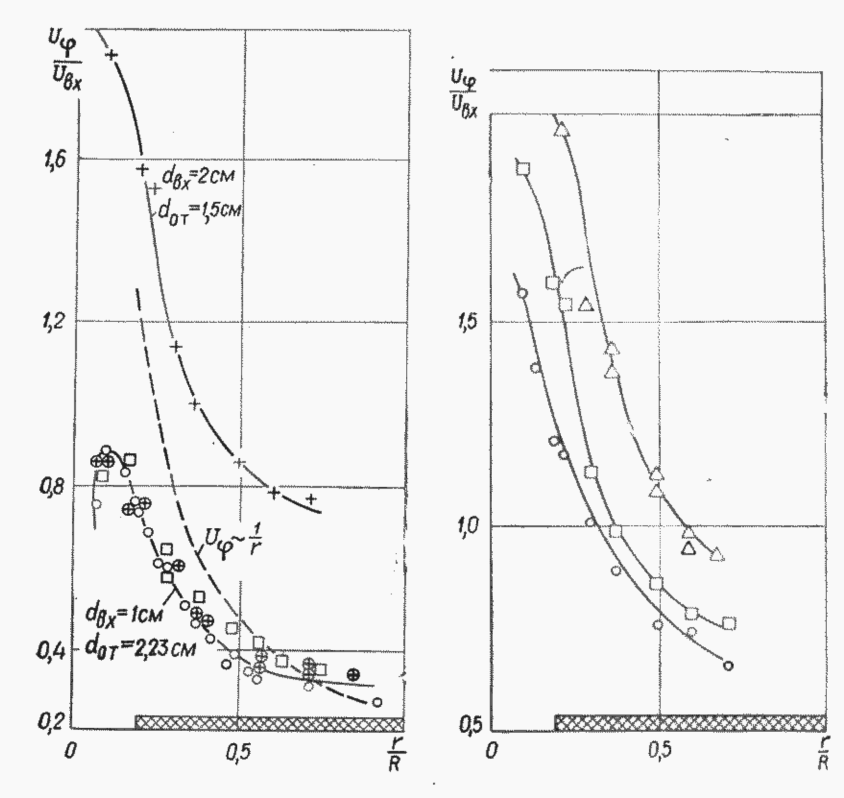


Рис. 7.12. Распределение вращательной компоненты скорости $\frac{U_\varphi}{U_{вх}}$ по радиусу $\frac{r}{R}$ $\left(\frac{H}{r_0} = 6{,}3;\ \oplus - \mathrm{Re} = -31{,}1;\ \square - \mathrm{Re} = -29{,}6;\ \circ - \mathrm{Re} = -22{,}2;\ \frac{H}{r_0} = 9{,}6;\ + - \mathrm{Re} = -34{,}2\right)$.

Рис. 7.13. Распределение вращательной компоненты скорости $\frac{U_\varphi}{U_{вх}}$ по радиусу $\frac{r}{R}$ при различных высотах жидкости H: $\triangle - \mathrm{Re} = -37{,}5$; $\square - \mathrm{Re} = -34{,}2$; $\circ - \mathrm{Re} = -32{,}0$.

В дальнейшем измерение распределения вращательных скоростей проводилось только в устойчивых режимах истечения жидкости.

Результаты измерений распределения вращательной скорости жидкости в вихревой воронке лазерным допплеровским измерителем скорости приведены на рис. 7.12 — 7.15. Поскольку величина Γ_0, как уже отмечалось в § 1, не известна и нахождение ее непосредственно из измерений оказалось невозможным, то для обезразмеривания данных была использована входная скорость $U_{вх} = \frac{4Q}{\pi d_{вх}^2}$, которая вычислялась по измеренному расходу жидкости. Безразмерная

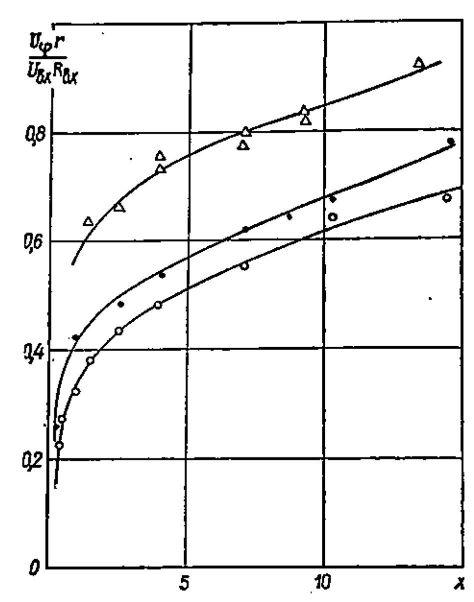


Рис. 7.14. Зависимость циркуляции вращательной скорости $\frac{U_\varphi r}{U_{вх}R_{вх}}$ от радиуса при различных высотах жидкости H ($d_{вх} = 2$ см, $2r_0 = 1,5$ см, $R_{вх} = 2,8$ см): △ — Re=—37,5; ● — Re=—34,2; ○ — Re=—32,0.

циркуляция П определялась как отношение опытной циркуляции к входной, т. е. как $П = \frac{U_\varphi r}{U_{вх}R_{вх}}$. (В дальнейшем под понятием вращательной скорости и ее циркуляции будем подразумевать их безразмерные величины).

Если построить зависимость вращательной скорости от радиуса для идеальной жидкости $U_\varphi = \frac{c}{r}$, находя константу c из эксперимента, и сравнить ее с распределениями вращательной скорости, полученными из опытов, то опытные точки располагаются ниже кривой $U_\varphi = \frac{c}{r}$ (рис. 7.12), что согласуется с результатами других исследователей [1, 121, 144].

Было обнаружено, что при постоянстве конструктивных параметров и расхода величина тангенциальной скорости сильно зависит от высоты жидкости в резервуаре H (рис. 7.13). Чем больше высота жидкости, тем скорость вращения жидкости меньше. Этот факт объясняется тем, что с увеличением высоты увеличивается трение жидкости о боковые стенки резервуара и возрастает ее масса в резервуаре, которую нужно закрутить, в то время как величина входной циркуляции $U_{вх}R_{вх}$ остается постоянной.

Если высота жидкости в резервуаре постоянна, то при одном и том же диаметре входного патрубка и стояка величина вращательной скорости не зависит от величины расхода, т. е. от радиального числа Рейнольдса (рис. 7.12). В этом случае величина вращательной скорости определяется геометрией течения (величинами диаметра входного патрубка и выпускного отверстия).

Следует отметить, что плотность экспериментальных точек, полученных для измерений при одних и тех же условиях, для области течения, расположенной вблизи оси вращения, заметно выше, чем для области вблизи стенок резервуара. Это объясняется большей величиной пульсаций вращательной скорости вблизи стенки, чем вблизи оси вращения, что приводит к снижению точности измерений осредненной скорости и соответственно к разбросу экспериментальных точек.

Измерения распределения вращательных скоростей по радиусу

вблизи оси вращения подтвердил полученный теоретически в § 1 результат о том, что размеры вихревой нити в случае вихревой воронки малы по сравнению с диаметром донного отверстия. Известно, что при динамическом вращении газа радиус вихревой нити значительно больше, чем в случае вихревой воронки, и примерно равен диаметру выходного отверстия (например, в циклонных камерах). Из этого следует, что радиус вихревой нити зависит от величины эффективной вязкости вблизи оси вращения

М. Ш. Марголиным [1] была построена аппроксимационная зависимость для вращательной скорости жидкости в вихревой воронке в предположении, что максимум вращательной скорости достигается на радиусе, равном радиусу донного отверстия. В дальнейших работах он же на основе этой зависимости и при определенных допущениях предложил способ расчета осерадиального течения и других аспектов движения жидкости в вихревой воронке. Для подтверждения своей зависимости М. Ш. Марголин [1] привел сравнение с данными Анвара [146].

Проведенные измерения распределения вращательной скорости в вихревой воронке с помощью ЛДИС показали, что максимум вращательной скорости расположен в большинстве случаев ближе к оси вращения, чем к краю выпускного отверстия, и всегда находится в площади выпускного отверстия. При этом его положение не фиксированно, а зависит от параметров течения и расхода жидкости. Если обратиться к рис. 7.3, то можно увидеть, что существует значительное расхождение в величине вращательной скорости при расчете по зависимости [1] и по способу, изложенному в § 1. Таким образом, аппроксимационная зависимость Марголина не соответствует реальной физической картине течения и не подтверждается ни прямыми измерениями вращательной скорости, ни результатами теоретического расчета, а ошибка вычислений по ней величины U_φ может достигать 100 %. Кстати, она не подтверждается и данными Анвара [146], на которые ссылался М. Ш. Марголин, так как они получены для цилиндрического резервуара с торцевой крышкой типа гидроциклона, течение в котором принципиально отличается от течения в вихревой воронке. Следовательно, аппроксимационная зависимость М. Ш. Марголина и полученные с ее помощью способы расчета других аспектов воронкообразования не могут быть рекомендованы для практических расчетов.

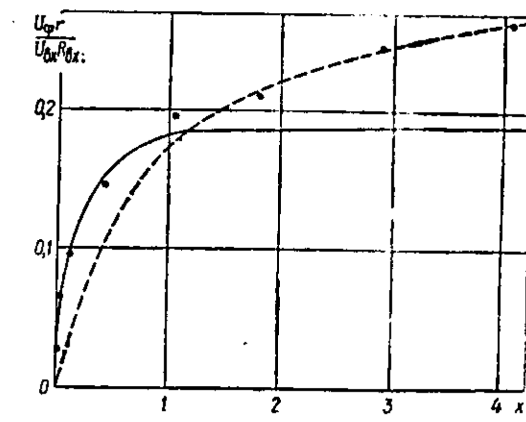


Рис. 7.15. Сравнение экспериментальных данных с данными расчета.

Распределения циркуляции вращательной скорости по радиусу вихревой

воронки показаны на рис. 7.14, 7.15, из которых видно, что имеет место непрерывный рост циркуляции с увеличением радиуса. При большей интенсивности крутки потока рост циркуляции больше. Полученные распределения свидетельствуют о том, что в исследовавшихся случаях в резервуаре отсутствовала область потенциального вращения жидкости по причине того, что относительный диаметр донного отверстия был сравнительно велик. Из этого следует, что при диаметрах донного отверстия $\frac{2r_0}{D} > 0{,}2$ в течении жидкости при наличии вихревой воронки отсутствует область постоянной циркуляции.

На рис. 7.15 приведены теоретические распределения циркуляции тангенциальной скорости по радиусу, построенные по формулам (7.6) для двух значений радиального числа Рейнольдса, которые вычислялись исходя из экспериментальных данных. Сплошная кривая соответствует радиальному числу Рейнольдса, найденному по опытным точкам, расположенным вблизи оси вращения, а штриховая линия — радиальному числу Рейнольдса для течения в пристенной области. Из рис. 7.15 видно, что экспериментальные результаты достаточно хорошо совпадают с теоретическими в тех областях, в которых экспериментально находилось Re, и расходятся в областях, на которые построенные зависимости были продолжены. Это объясняется тем, что радиальное число Рейнольдса, вычисленное для пристенной области, равно $\mathrm{Re} = -1{,}38$, а для области, расположенной вблизи оси вращения, $\mathrm{Re} = -4{,}98$. Соответственно эффективная вязкость в области над донным отверстием меньше, чем в пристенной, приблизительно в четыре раза, при этом величина эффективной вязкости, вычисленная по радиальному числу Рейнольдса, в пристенной области больше, чем кинематическая вязкость воды, более чем в 10 раз. Значит, если бы эффективная вязкость была постоянной по радиусу и равнялась таковой в пристенной области, то циркуляция вращательной скорости уменьшалась бы к оси вращения намного быстрее, чем это происходит в реальном течении. А так как с уменьшением радиуса эффективная вязкость снижается, то, естественно, экспериментальные точки располагаются тем выше от штрихпунктирной кривой, чем ближе они к оси вращения. И наоборот, экспериментальные точки совпадают со сплошной кривой в области, расположенной над донным отверстием, и лежат выше ее в пристенной области, где величина Re уменьшается, если предположить, что эффективная вязкость на всем радиусе равна таковой вблизи оси вращения. Аналогичное соотношение между теоретическими и экспериментальными данными наблюдается и при наличии воздушного ядра.

Сравнение экспериментальных данных с теоретическими показывает, в частности, что турбулентная структура потока при течении жидкости в вихревой воронке, образующейся в цилиндрическом резервуаре, различна для приосевой и пристенной областей.

Для построения теоретического распределения циркуляции вдоль радиуса, соответствующего реальному течению, необходимо область течения разбить по крайней мере на две — над донным отверстием

и вне его — и в каждой из них определить соответствующее ей постоянное радиальное число Рейнольдса, после чего можно производить расчет по методике, предложенной в § 1.

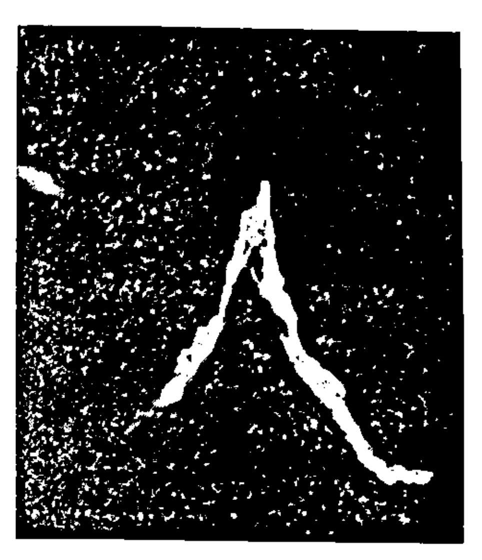


Рис. 7.16. Форма допплеровского сигнала на экране анализатора спектра.

Помимо экспериментальных данных по распределению тангенциальной скорости и ее циркуляции по радиусу во время опытов было установлено, что допплеровский сигнал, образец которого показан на рис. 7.16, вблизи оси вращения и в пристенной области становится шире, чем сигнал из области середины радиуса резервуара. При этом ширина допплеровского сигнала могла увеличиваться в несколько раз. В пристенной области такое расширение, возможно, обусловлено увеличением пульсационной составляющей скорости жидкости в этих областях, а вблизи оси появляется сравнительно большой градиент скорости по измерительному объему.

§ 4. ПОГЛОЩЕНИЕ ВИХРЕВОЙ ВОРОНКОЙ ТВЕРДЫХ ПЛАВАЮЩИХ ТЕЛ

В изучении движения жидкости при наличии вихревой воронки большой научный и практический интерес представляет задача о взаимодействии вихревой воронки с твердыми телами, особенно с теми, плотность которых меньше плотности жидкости.

Впервые такая задача возникла после того, как в 1951 г. В. С. Фокеев [118] предложил использовать вихревую воронку для очистки поверхностей водоемов перед гидротехническими сооружениями от льда, шуги и различного плавающего мусора. Он разработал способ образования устойчивой воронки и исследовал поглощение ею различных твердых плавающих тел, в качестве которых использовались деревянные бруски известных размеров, а также шарики из смеси воска с песком. Была определена зависимость засасывающей силы воронки, за меру которой принималась величина выталкивающей силы, действующей на данное твердое тело, от конструктивных параметров.

Нужно отметить, что выбор такой меры засасывающей силы возможен лишь для одинаковых по форме тел, например для брусков или сфер, но не пригоден в общем случае, так как при одной и той же выталкивающей силе тела могут значительно отличаться размерами, формой, удельным весом и т. д.

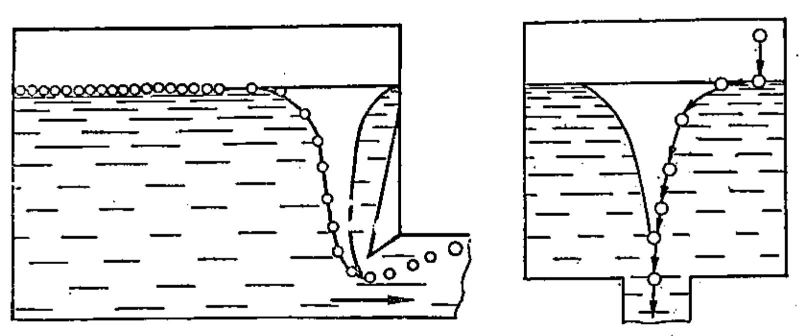


Рис. 7.17. Применение вихревой воронки для ввода плавающих гранул во входную трубу насоса.

Рис. 7.18. Схема поглощения твердого плавающего тела вихревой воронкой.

В. И. Поликовский и Р. Г. Перельман [101] экспериментально изучили влияние на поглощение воронкой твердых тел таких параметров, как линейные размеры и форма тела, глубина погружения тела с одинаковым сечением плавания (при различном удельном весе), положение центра тяжести в телах одних и тех же размеров и формы, интенсивность воронки. Опыты проводились на экспериментальной установке, в которой воронка создавалась с помощью тангенциальной подачи воды в цилиндрический резервуар с круглым отверстием в дне. Помимо других результатов было отмечено существование радиусов равновесия для плавающих тел, достигнув которых тело постоянно вращается на них.

В настоящее время на практике вихревые воронки применяются в суспензионном литье для ввода добавок в жидкий металл, а также в нефтехимической промышленности [152] для подачи плавающих гранул со свободной поверхности жидкой фазы на вход насоса (рис. 7.17).

Главным в задаче о поглощении твердых плавающих тел вихревой воронкой является вопрос об условиях поглощения данного твердого тела данной воронкой. Если тело не поглощается воронкой, то необходимо установить, какая организация течения жидкости требуется, чтобы поглощение произошло. Ясно, что движение тела на свободной поверхности, а также при поглощении определяется гидродинамической картиной течения жидкости. Поэтому, определив связь между условиями поглощения и параметрами течения жидкости, по последним можно определять характер взаимодействия твердого тела с вихревой воронкой, тогда задача о поглощении сведется к задаче об определении движения жидкости в каждом конкретном случае. При этом появляется возможность управления процессом поглощения твердых тел воронками путем организации необходимого для поглощения режима течения жидкости.

Для экспериментального исследования поглощения твердых плавающих тел вихревой воронкой была создана экспериментальная установка, представляющая собой цилиндрическую камеру диаметром

$D = 0,298$ м, изготовленную из оргстекла. Вода из напорного резервуара подавалась через тангенциально расположенный подвод, представлявший собой цилиндрические трубы различного диаметра: $\frac{d_{вх}}{D} = 0,163;\ 0,207;\ 0,233;\ 0,311$, и вытекала через донное отверстие в трубы диаметра: $\frac{2r_0}{D} = 0,170;\ 0,223;\ 0,233;\ 0,350$. Конструкция установки позволяла изменять радиус первоначальной закрутки потока. Расход воды измерялся с помощью мерных емкостей, а время — секундомером.

В качестве твердых тел использовались шарики двух сортов: изготовленные из бумаги и смеси воска с древесными опилками. Были измерены их размеры и плотность. Все шарики сначала покрывались нитрокраской, а затем одним и тем же лаком для того, чтобы их поверхность была одинаковой.

В качестве характеристики шариков была выбрана скорость их всплывания в той же жидкости, которая должна их затягивать. Такой выбор был обусловлен тем, что на практике вихревые воронки поглощают не однородные твердые тела с одинаковым объемом, формой и массой, а тела различной формы и удельного веса. К тому же вычисление коэффициентов сопротивления тел сложной формы представляет собой трудную задачу, в то время как скорость всплывания твердого тела легко измерить даже в расплаве жидкого металла.

Скорость всплывания шариков в воде измерялась в трубе квадратного поперечного сечения размером 14 × 14 см длиной 3 м. Вычисленные коэффициенты сопротивления по величине совпали с аналогично полученными в работе [104] и равнялись $c_f = 0,95 \div 1,0$. Допустим, что осевая скорость жидкости у конца воздушного ядра U_z составляет часть среднерасходной скорости в стояке $W_{ср}$: $U_z = \beta W_{ср}$. Если частица полностью погружена и находится в равновесии, то величина затягивающей силы равна: $F_c = c_f S \frac{\rho U_z^2}{2} = c_f S \rho \frac{\beta^2 W_{ср}^2}{2}$. С другой стороны, зная скорость всплытия W_0, можно также найти эту же силу $F_c = c_f S \rho \frac{W_0^2}{2}$. Идеализируя картину движения тела в обоих случаях, можно считать, что величины затягивающей силы примерно равны между собой, а значит, между W_0 и $W_{ср}$ в момент поглощения существует простая линейная связь: $W_0 = \beta W_{ср}$.

При экспериментальном исследовании шарики клали на свободную поверхность воды вдали от оси вращения. Шарик транспортировался по поверхности воронки в ее конец и затем при определенных условиях поглощался (рис. 7.18). При этом измерялся расход, по которому вычислялась среднерасходная скорость. Связь между скоростью всплытия шариков и среднерасходной скоростью жидкости в момент их затягивания вихревой воронкой приведена на рис. 7.19, она подтверждает сделанные выше предположения. Если точка, определяемая скоростью всплытия шарика и расходом жидкости, лежит ниже полученной прямой, то шарик поглощается воронкой; если точка лежит выше — не поглощается. В исследовавшихся случаях

установлено, что коэффициент пропорциональности равен $\beta = 0{,}44$.

Для более точного расчета затягивания твердых тел вихревой воронкой необходимо знать коэффициент их сопротивления, а также величину и распределение осевых и вращательных скоростей вблизи конца воздушного ядра.

Во время эксперимента при определенных условиях наблюдалось два вида циркуляции шариков (рис. 7.20), подтвердивших данные о существовании радиусов равновесия для твердых плавающих тел. В первом случае (рис. 7.20, *а*) шарик, достигший некоторого фиксированного радиуса, уже не мог продвигаться ближе к оси вращения жидкости. Случайной флуктуацией интенсивности вихревой воронки он мог отброситься от этого положения и снова вернуться на радиус равновесия R_*. Аналогичную циркуляцию деревянных дисков наблюдали В. И. Поликовский и Р. Г. Перельман [101]. Во втором случае (рис. 7.20, *б*) шарик случайной флуктуацией интенсивности мог отбрасываться вглубь жидкости, где засасывающая сила резко уменьшается, затем всплывал и снова двигался к радиусу равновесия, т. е. наблюдалась циркуляция и в вертикальном направлении.

Помимо шариков, изготовленных из смеси воска с древесными опилками, в опытах по изучению поглощения твердых плавающих тел вихревой воронкой использовались также шарики из полистирола с плотностью, близкой к плотности воды, и из пенополистирола с плотностью, много меньшей, чем плотность воды. Исследования проводились на несколько измененной установке $D = 8 \cdot 10^{-2}$ м, $2r_0 = 1{,}6 \cdot 10^{-2}$ м, схема которой показана на рис. 7.21. Шарики

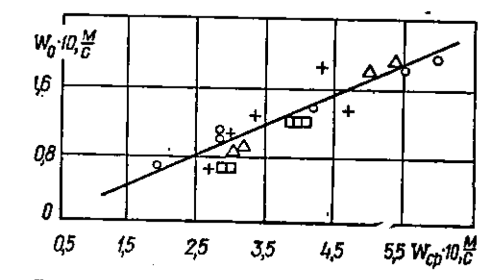
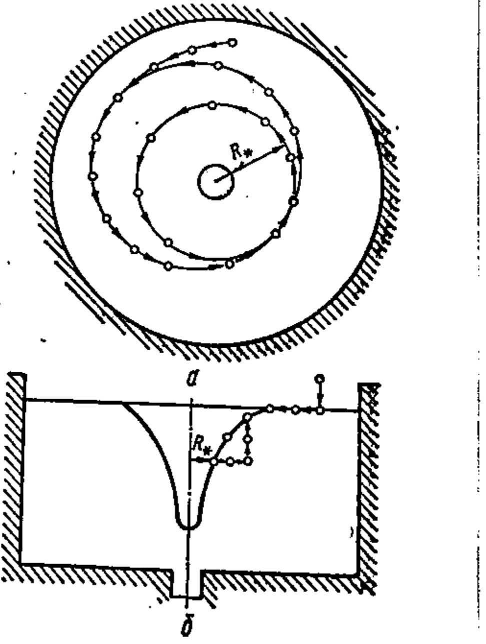


Рис. 7.19. Значения среднерасходной скорости $W_{ср}$, при которой происходит поглощение шара, имеющего скорость всплытия W_0 ($2r_0$, см):

○ — 6,7; + — 5,2; □ — 10,6; △ — 7,9; $H = 44{,}4$ см; $d_{вх} = 9{,}4$ см; $R_{вх} = 8{,}6$ см; $d_ш = (11{,}6 \pm 0{,}3)$ мм.



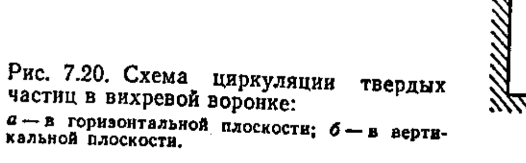


Рис. 7.20. Схема циркуляции твердых частиц в вихревой воронке:

а — в горизонтальной плоскости; *б* — в вертикальной плоскости.

имели приблизительно одинаковый диаметр, равный $d_ш = 2 \cdot 10^{-3}$ м.

Приведенные на обеих установках эксперименты показали следующее.

Все частицы, которые при движении по свободной поверхности проходили область профиля воздушного ядра, имеющего гиперболический вид, попадали в хвостовую часть воздушного ядра. Из этого следует, что при расчете поглощения твердого тела вихревой воронкой необходимо, чтобы величина возможного радиуса равновесия была меньше радиуса, на котором профиль воздушного ядра переходит из гиперболического вида в параболический.

В случае ввода в вихревую воронку коллектива частиц последние выстраиваются в хвостовой части воздушного ядра в цепочку и их затягивание происходит последовательно одна за другой (рис. 7.22).

Рис. 7.21. Схема применения вихревой воронки в суспензионном литье.

При определенных соотношениях между размерами воздушного ядра в его хвостовой части и размерами твердого тела возможно движение тела с присоединенным к нему воздушным пузырем (рис. 7.23), который препятствует поглощению тела вихревой воронкой. В суспензионном литье при затягивании инокуляторов такое явление является нежелательным, поэтому размеры частиц должны выбираться исходя из размеров воздушного ядра вихревой воронки в ее хвостовой части; либо по размерам частиц должна выбираться соответствующая им вихревая воронка.

Как уже отмечалось, твердые тела, обычно применяемые на практике, представляют собой смесь твердых частиц различных размеров, веса и формы. Поэтому после попадания тел на свободную поверхность вихревой воронки происходит их разделение, вследствие чего одни частицы достигают хвостовой части воздушного ядра быстрее, чем другие, и поглощение отдельных частиц происходит по мере их попадания в конец воронки. Только при очень больших количествах твердых тел или при очень малых размерах частиц (например, таких, как древесные опилки) возможно движение группы частичек в виде сплошной среды.

При гидромоделировании движения расплавленного чугуна по литниковой системе было установлено, что определенной организацией течения в литниковой системе можно управлять раздачей инокуляторов по питателям (рис. 7.21). Так, при парной работе питателей можно организовать течение жидкости таким образом, что твердые частицы будут проходить в форму через выбранный питатель полностью или частично, что дает возможность вводить инокуляторы в определенный слой отливаемой заготовки. Ввод частиц

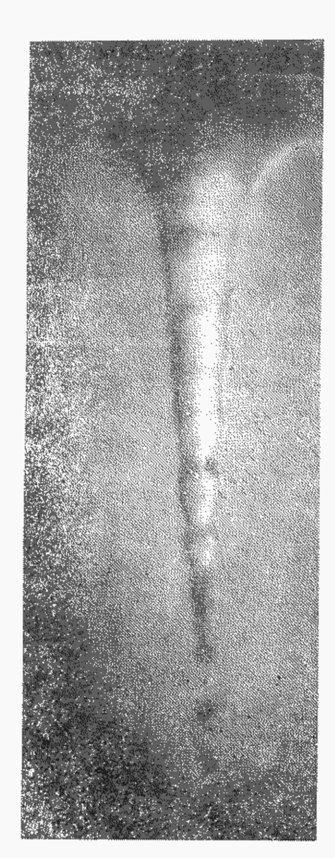
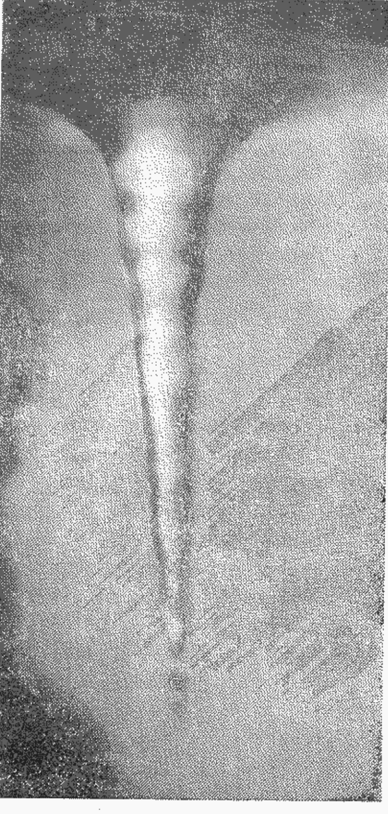



Рис. 7.22. Поглощение твердых плавающих сфер в вихревой воронке

Рис. 7.23. Образование воздушного пузыря у поглощаемого тела.

через выбранный питатель зависит от расхода жидкости через него и высоты жидкости в литниковой чаше.

Пенополистироловые частицы тем легче вводились в систему, чем ближе ко дну резервуара размещался работающий питатель. При этом частицы располагались вблизи оси вращения и двигались по спирали (рис. 7.24). Это явление, возможно, объясняется наличием одностороннего тангенциального подвода жидкости в резервуар, вследствие чего ось вращения жидкости не совпадает с геометрической осью резервуара.

Как уже отмечалось, твердые частицы могут и не поглощаться вихревой воронкой. На рис. 7.25 показан ввод большого числа пенополистироловых частиц в вихревую воронку в этом случае. Из рисунка видно, что частицы, заполнив объем воздушного ядра вихревой воронки, вращаются вместе с жидкостью.

Кроме того, полистироловые частицы были использованы для изучения влияния наличия твердой фазы с плотностью, близкой к

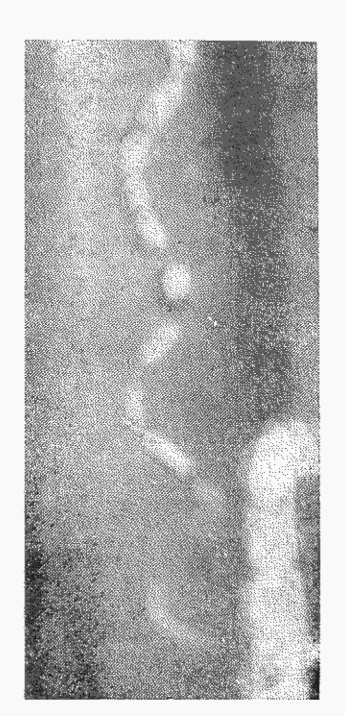
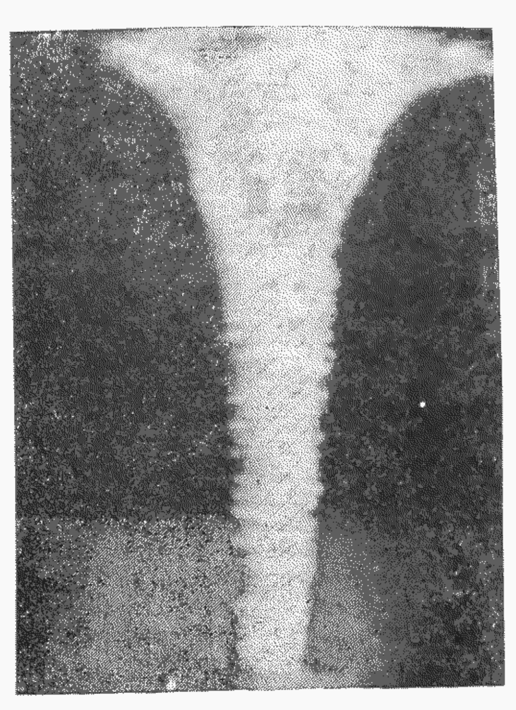



Рис. 7.24. Движение твердых плавающих тел на оси вращения жидкости.

Рис. 7.25. Движение большого числа частиц малой плотности в вихревой воронке

плотности воды, на расход жидкости через гидравлическую систему. Проведенные эксперименты позволили установить, что твердые частицы при их объемной концентрации до 15 % не влияют на расходные характеристики системы.

Наряду с анализом поглощения отдельного твердого тела вихревой воронкой определенный интерес представляет нахождение объемного расхода твердых тел, который способна пропустить вихревая воронка. Такой расход был назван В. С. Фокеевым транспортирующей способностью вихревой воронки. Для воронки Фокеева он зависит от расхода жидкости и конструктивных параметров щита-вихреобразователя [118].

Ранее было экспериментально установлено, что при затягивании плавающих тел воронкой они засасываются с конца воздушного ядра одно за другим, выстраиваясь при этом в цепочку. Предельным случаем (т. е. когда расход твердых тел максимален) является такой, когда тела (шары) плотно упакованы и между ними нет зазора. Считаем, что скорость всплытия всей упаковки равна приблизительно скорости всплытия отдельного шарика W_0.

Поскольку у конца воздушного ядра осевая скорость меньше среднерасходной, то очевидно, что для полного поглощения частицы

системой ей необходимо пройти путь от конца воронки до плоскости донного отверстия.

Считая, что упаковка движется с постоянной скоростью $W_т$, объемный расход твердых тел можно вычислить следующим образом:

$$Q_т = \frac{W_т}{d_ш} V = \frac{U_z - W_0}{d_ш} V, \qquad (7.11)$$

где V — объем шарика.

Скорость жидкости у конца вихревой воронки можно приблизительно записать как $U_z = \beta W_{ср}$. Зная объем шара, перепишем (7.11) в виде

$$Q_т = \frac{\beta W_{ср} - W_0}{6} \pi d_ш^2 = \frac{2}{3} \beta \left(\frac{d_ш}{2r_0}\right) Q - \frac{\pi d_ш^2}{6} W_0. \qquad (7.12)$$

Коэффициент β — экспериментально определяемая константа, равная, как и ранее, 0,44.

Полученная зависимость, в частности, показывает, что объемный расход твердых тел прямо пропорционален расходу жидкости и обратно пропорционален площади донного отверстия.

Найдем относительный объем твердых тел, пропускаемых вихревой воронкой:

$$\frac{Q_т}{Q} = \frac{2}{3} \beta \left(\frac{d_ш}{2r_0}\right)^2 - \frac{\pi d_ш^2 W_0}{6Q}.$$

Из полученного выражения видно, что относительный объем твердых тел не может превышать некоторого значения

$$\left(\frac{Q_т}{Q}\right)_{пр} = \frac{2}{3} \beta \left(\frac{d_ш}{2r_0}\right)^2.$$

Физически это означает, что объемный расход твердых тел не может превышать объемный расход жидкости через сечение, равное по площади сечению упаковки твердых частиц.

При значительных объемных концентрациях твердых тел они могут поглощаться не в виде цепочки из одиночных шаров, а в виде шнура из нескольких цепочек. В этом случае объем твердых тел, пропускаемый вихревой воронкой, будет равен расходу, вычисленному по (7.12) и умноженному на число цепочек в шнуре.

Анализ различных аспектов поглощения твердых тел вихревыми воронками показал, что важнейшей характеристикой твердого тела является его коэффициент сопротивления, вычисляемый как для полностью погруженного тела, так и для погруженного лишь частично. Нахождение такого коэффициента представляет собой отдельную гидродинамическую задачу. Трудности в определении сопротивления тела для нашей задачи обусловлены тем, что оно вращается с некоторой угловой скоростью, которую нужно каким-то образом найти. Кроме того, при движении по свободной поверхности жидкости тело частично погружено, следовательно, необходимо определять сопротивление тела в зависимости от степени его погружения в жидкость. В обоих случаях (полного и частичного погружения) набегающий поток имеет градиентный профиль скорости.

Поэтому в данном случае не будем рассматривать полную задачу о нахождении коэффициента сопротивления, а укажем лишь ее особенности применительно к движению твердого тела в вихревой воронке. Для удобства считаем, что твердое тело имеет сферическую форму.

Опыты по определению сопротивления вращающегося шара, обдуваемого равномерным потоком, были проведены Лутандером и Ридбергом [155]. Ими обнаружено, что коэффициент сопротивления зависит от двух безразмерных величин: числа Рейнольдса набегающего потока $Re = \frac{U_\infty d_ш}{\nu}$ и отношения максимальной вращательной скорости поверхности тела к скорости набегающего потока $\frac{U_{\varphi m}}{U_\infty}$. Влияние вращения сказывается в том, что, начиная с $\frac{U_{\varphi m}}{U_\infty} = 1{,}4$, критические числа Re уменьшаются с увеличением $\frac{U_{\varphi m}}{U_\infty}$, т. е. центробежные силы действуют как турбулизующий фактор. Однако в области значений $\frac{U_{\varphi m}}{U_\infty}$ от 0 до 1,4, когда отрыв еще ламинарный, критические числа Re увеличиваются [45].

Если предположить, что вращение шара совпадает с вращением жидкости на радиусе, равном радиусу шара, то параметры, определяющие коэффициент сопротивления, можно записать следующим образом:

для случая вихревой воронки

$$\frac{U_{\varphi m}}{U_\infty} = \frac{\omega d_ш}{2(U_z - U_{zт})} = \frac{U_\varphi}{U_z - U_{zт}},$$

$$Re = \frac{(U_z - U_{zт}) d_ш}{\nu};$$

для случая равновесия

$$\frac{U_{\varphi m}}{U_\infty} = \frac{U_\varphi}{U_z} \cong \frac{U_\varphi}{\beta W_{ср}}, \qquad (7.13)$$

$$Re = \frac{U_z d_ш}{\nu} \cong \frac{\beta W_{ср} d_ш}{\nu}. \qquad (7.14)$$

Из соотношений (7.13) и (7.14) можно сделать вывод, что коэффициент сопротивления шара при поглощении его вихревой воронкой определяется не только его радиусом, кинематической вязкостью жидкости и скоростью набегающего потока, но и отношением вращательной компоненты скорости жидкости к осевой.

В реальном случае шар вращается с некоторым проскальзыванием относительно жидкости и его угловая скорость меньше соответствующей угловой скорости жидкости. Максворти [156] опытным путем установил, что при движении шара в потоке жидкости, вращающейся как твердое тело, проскальзывание шара и его сопротивление зависят от трех безразмерных параметров: числа Тейлора

$T = \frac{\omega d_ш^2}{\nu}$, числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = \frac{(U_z - U_{zт}) d_ш}{\nu}$, отношения $\frac{d_ш}{R_p}$, где $R_р$ — радиус цилиндрического резервуара.

Таким образом, чтобы определить коэффициент сопротивления шара для случая поглощения его вихревой воронкой, необходимо знать величины по крайней мере четырех параметров: T, Re, $\frac{d_ш}{R_р}$, $\frac{U_{\varphi m}}{U_z}$, которые можно найти, лишь умея рассчитывать движение жидкости в вихревой воронке, т. е. зная поле скоростей в каждом конкретном случае.

Отметим, что рассматривался случай твердотельного вращения жидкости, причем размеры тела были меньше, чем радиус вихревой нити. Если размеры тела больше радиуса вихревой нити, то задача о нахождении его угловой скорости сильно усложняется. Поэтому при анализе взаимодействия твердых плавающих тел с вихревой воронкой необходимо знать еще и соотношение между размерами тела и вихревой нити.

§ 5. О МОДЕЛИ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В РАЗВИТОЙ ВИХРЕВОЙ ВОРОНКЕ

Создание теоретической модели течения жидкости в развитой вихревой воронке является задачей еще более актуальной, чем создание модели для неразвитой воронки, так как таких моделей практически нет (не считая примитивной модели А. Гибсона для идеальной жидкости). На практике обычно пользуются эмпирическими зависимостями, хотя достоверность некоторых, например [1], вызывает определенные сомнения.

В данном параграфе покажем, что основное уравнение вращения жидкости в неразвитой вихревой воронке (7.4) можно применить для теоретического расчета вращательной скорости и профиля свободной поверхности жидкости в развитой вихревой воронке.

Для развитой вихревой воронки одной из главных ее характеристик является радиус воздушной полости $x_в$ в плоскости донного отверстия. Используя его, первое приближение функций $h(x)$ и $q(x)$ для развитой воронки, по аналогии с § 1, запишем как

$$h = 1 - \frac{x_в}{x}, \quad q = \frac{x - x_в}{(1 - x_в)}, \quad x \leqslant 1,$$

$$h = 1 - \frac{x_в}{x}, \quad q = 1, \quad x \geqslant 1. \tag{7.15}$$

Интегрируя уравнение (7.4), с учетом (7.15) получаем

$$\Pi_1 = c_{11} \exp\left\{\frac{\mathrm{Re}}{1 - x_в} x\right\} + c_{12}, \quad x \leqslant 1,$$

$$\Pi_2 = c_{21} \frac{(x - x_в)^{\mathrm{Re}+1}}{\mathrm{Re} + 1} + c_{22}, \quad x \geqslant 1.$$

Для нахождения констант интегрирования имеются следующие условия:

$$x \to \infty, \quad \Pi \to 1,$$
$$x = 1, \quad \Pi_1 = \Pi_2,$$
$$x = 1, \quad \frac{d\Pi_1}{dx} = \frac{d\Pi_2}{dx},$$

подстановка в которые дает новые выражения для Π_1 и Π_2:

$$\Pi_1 = c_{21} \frac{(1 - x_в)^{\mathrm{Re}+1}}{\mathrm{Re}} \left[\exp\left\{\frac{\mathrm{Re}}{1 - x_в}(x - 1) - \frac{1}{\mathrm{Re} + 1}\right]\right. + 1, \quad x \leqslant 1,$$

$$\Pi_2 = c_{21} \frac{(x - x_в)^{\mathrm{Re}+1}}{\mathrm{Re} + 1} + 1, \quad x \geqslant 1. \tag{7.16}$$

Как видно из (7.16), в выражениях для распределения циркуляции вращательной скорости присутствует неизвестная константа интегрирования c_{21}. В § 1 ее находили из условия отсутствия вращения на оси.

Некоторые исследователи, изучающие различные закрученные течения, ставят аналогичное граничное условие и при существовании воздушной полости на оси вращения или даже рассматривая течение в области, расположенной над выпускным отверстием, мотивируя это тем, что выпускное отверстие можно сделать сколь угодно малым. При внимательном анализе становится очевидным, что такое граничное условие неправомерно и приводит к ошибочным результатам. Поэтому и в случае развитой вихревой воронки такое условие ставить нельзя, так как вблизи оси находится воздушное ядро.

Рассмотрим полученное в § 2 уравнение для профиля свободной поверхности (7.7). Отбросив два последних члена вследствие их малости, получим необходимое условие для нахождения c_{21}

$$h(x_в) = 0 = 1 - \mathrm{Ko}^2 \int_{x_в}^{\infty} \left(\frac{\Pi}{x}\right)^2 dx. \tag{7.17}$$

Выражение (7.17) преобразуем к удобному виду в соответствии с (7.16):

$$\int_{x_в}^{1} \left(\frac{\Pi_1}{x}\right)^2 dx + \int_{1}^{\infty} \left(\frac{\Pi_2}{x}\right)^2 dx = \frac{1}{\mathrm{Ko}^2}. \tag{7.18}$$

Обозначим в (7.16)

$$\Phi(x) = \frac{(1 - x_в)^{\mathrm{Re}+1}}{\mathrm{Re}} \left[\exp\left\{\frac{\mathrm{Re}}{1 - x_в}(x - 1)\right\} - \frac{1}{\mathrm{Re} + 1}\right],$$

$$F(x) = \frac{(x - x_в)^{\mathrm{Re}+1}}{\mathrm{Re} + 1}. \tag{7.19}$$

Подставим (7.16) с учетом обозначений (7.19) в (7.18):

$$\int\limits_{x_в}^{1} \frac{(c_{21}\Phi + 1)^2}{x^2}\, dx + \int\limits_{1}^{\infty} \frac{(c_{21}F + 1)^2}{x^2}\, dx = \frac{1}{\text{Ko}^2}.$$

Интегрируя в этом выражении и группируя вместе члены при одинаковых степенях c_{21}, получаем уравнение для c_{21}:

$$c_{21}^2 \underbrace{\left(\int\limits_{x_в}^{1} \frac{\Phi^2}{x^2}\, dx + \int\limits_{1}^{\infty} \frac{F^2}{x^2}\, dx\right)}_{f_1} + 2c_{21} \underbrace{\left(\int\limits_{x_в}^{1} \frac{\Phi}{x^2}\, dx + \int\limits_{1}^{\infty} \frac{F}{x_2}\, dx\right)}_{f_2} +$$

$$+ \frac{1}{x_в} - \frac{1}{\text{Ko}^2} = 0,$$

решение которого имеет вид

$$c_{21} = -\frac{f_2}{f_1} \pm \sqrt{\frac{f_2^2}{f_1^2} - \left(\frac{1}{x_в} - \frac{1}{\text{Ko}^2}\right)\frac{1}{f_1}}. \qquad (7.20)$$

Знак, стоящий перед радикалом, выберем из условия равенства c_{21} нулю для идеальной жидкости, в которой $x_в = \text{Ko}^2$. Так как из численных расчетов следует, что $f_2 < 0$, $f_1 > 0$, то, значит, константа c_{21} вычисляется по формуле

$$c_{21} = -\frac{f_2}{f_1} - \sqrt{\frac{f_2^2}{f_1^2} - \left(\frac{1}{x_в} - \frac{1}{\text{Ko}^2}\right)\frac{1}{f_1}}. \qquad (7.21)$$

Следовательно, для того чтобы рассчитать распределение циркуляции тангенциальной скорости, нужно знать величину радиуса воздушной полости вихревой воронки $r_в$.

На рис. 7.26 и 7.27 показаны сравнение распределений тангенциальной скорости и профиль свободной поверхности, полученные для вязкой и идеальной жидкостей. Из рисунков видно, что величина тангенциальной скорости в вязкой жидкости меньше, чем в идеальной, и это отличие увеличивается по мере приближения к оси вращения. С ростом $|\text{Re}|$ величина U_φ возрастает (рис. 7.28) и стремится к величине U_φ в идеальной жидкости.

При расчете закрученных течений, например в центробежных форсунках, для нахождения $x_в$ обычно используют принцип максимума расхода: радиус воздушного ядра устанавливается таким, что расход жидкости через систему получается максимальным. Если принять, что расход при наличии развитой вихревой воронки можно записать согласно [101] как

$$Q_1 = 0{,}63\,(1 - x_в)\,\pi r_0^2 \sqrt{2gH},$$

то видно, что $Q_1 = \max$ лишь при $x_в = 0$.

Существует другой способ нахождения $x_в$. В работе [33] М. А. Гольдштик показал, что расчет радиуса воздушной полости закрученных течений может основываться на принципе минимума потока кинетической энергии, который записывается следующим образом:

$$T = \pi\rho \int\limits_{r_в}^{R} (U_\varphi^2 + U_z^2)\, rU_z dr.$$

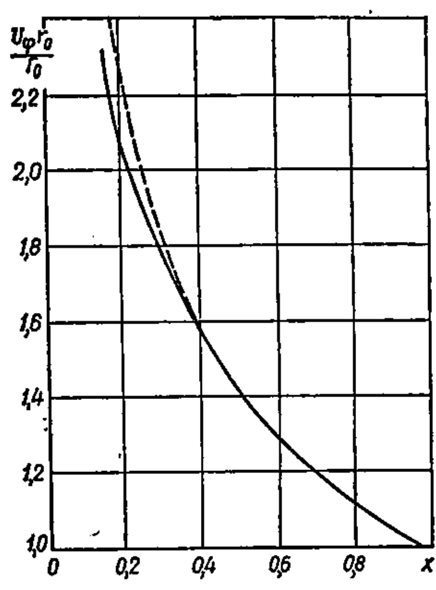


Рис. 7.26. Распределение вращательной скорости U_φ по x для вязкой жидкости при Re = −3 (сплошная линия) и для идеальной (штриховая линия) при $x_в = 0{,}15$.

Рис. 7.27. Профили свободной поверхности в вязкой жидкости Re = −3 (сплошная линия) и в идеальной (штриховая линия).

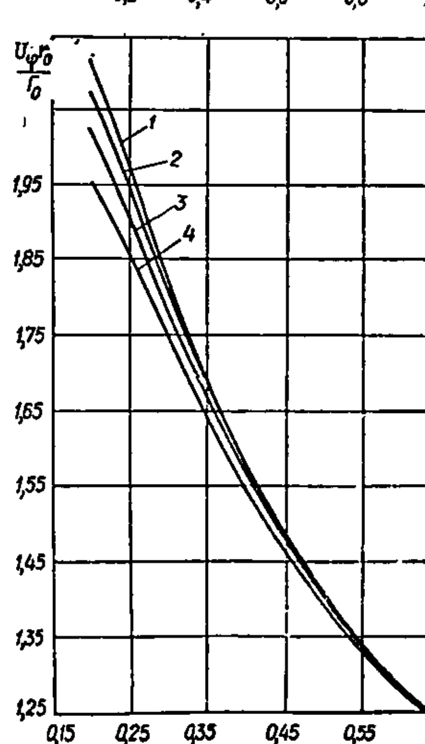


Рис. 7.28. Распределение вращательной скорости U_φ по x при различных Re:

1 — Re = −6; 2 — Re = −5; 3 — Re = −4; 4 — Re = −3, $x_в = 0{,}15$.

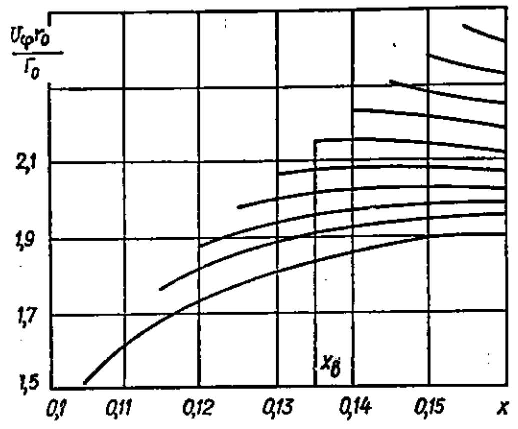


Рис. 7.29. Распределение вращательной скорости U_φ по x при различных $x_в$.

Применим этот принцип к течению жидкости в развитой вихревой воронке. Поток кинетической энергии в рассматриваемом случае имеет вид

$$T = \pi\rho \int_{r_в}^{\infty} (U_\varphi^2 + U_z^2)\, rU_z dr = \pi\rho \left[\int_{r_в}^{r_0} (U_\varphi^2 + U_z^2)\, rU_z dr + \int_{r_0}^{\infty} (U_\varphi^2 + U_z^2)\, rU_z dr \right]. \quad (7.22)$$

В области $r > r_0$ из-за малой искривленности свободной поверхности можно считать, что $U_z = 0$. Следовательно, второй интеграл в выражении для T приблизительно равен нулю. Делая следующие замены $U_\varphi = \frac{\Pi\Gamma_0}{r}$ и $U_z = \frac{Q_1}{\pi r_0^2 (1 - x_в)}$, выражение (7.22) преобразуем к виду

$$T = \pi\rho \int_{r_в}^{r_0} \left(\frac{\Pi^2\Gamma_0^2}{r^2} + \frac{Q_1^2}{\pi^2 r_0^4 (1 - x_в)^2} \right) \frac{Q_1}{\pi r_0^2 (1 - x_в)}\, r dr = \frac{K}{(1 - x_в)^2} + \frac{N}{(1 - x_в)} \int_{x_в}^{1} \frac{\Pi^2}{x}\, dx, \quad (7.23)$$

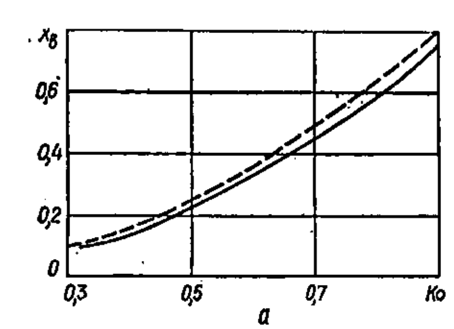
где

$$K = \frac{\rho Q_1^3}{2\pi^3 r_0^4}, \quad N = \frac{\rho Q_1 \Gamma_0^2}{2 r_0^2} \left[\frac{K}{N} = \left(\frac{Q_1}{\pi r_0 \Gamma_0} \right)^2 \right]. \quad (7.24)$$

Построив по (7.23) зависимость $T = T(x_в)$, обнаружим, что в случае развитой вихревой воронки поток кинетической энергии минимума не имеет. Следовательно, принцип минимума потока кинетической энергии не может быть использован для нахождения $x_в$.

Таким образом, попытки получить дополнительное условие для нахождения $x_в$, исходя из не связанных с гидродинамикой соображений, ни к чему не привели. Поэтому становится очевидным, что нужно искать еще одно условие для скорости или ее циркуляции (что было сделано в случае неразвитой вихревой воронки). И не просто условие, а условие на свободной поверхности в точке $r = r_в$.

Рассмотрим зависимость профиля тангенциальной скорости от радиуса воздушной полости (рис. 7.29). Как видно из рисунка, про-



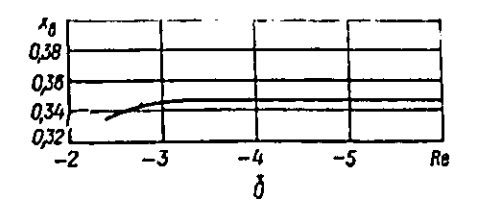


Рис. 7.30. Зависимость размера воздушной полости $x_в$ от числа Колфа Ko (*а*) и радиального числа Рейнольдса Re (*б*).

филь может быть двух видов: один — с наличием максимума скорости, второй — с непрерывным ростом величины скорости с уменьшением радиуса. С другой стороны, из экспериментальных данных известно, что на свободной поверхности вихревой воронки U_φ имеет максимальную величину. Отсюда находим искомое условие для тангенциальной скорости в точке $\left.\frac{dU_\varphi}{dr}\right|_{r=r_в} = 0$, или, что то же, в обозначениях, принятых в настоящей главе

$$2x_в\Pi'(x_в) - \Pi(x_в) = 0. \quad (7.25)$$

Подстановкой первого выражения из (7.16) в (7.25) находим константу c_{21}:

$$c_{21} = \frac{\mathrm{Re}\,(\mathrm{Re} + 1) \exp(\mathrm{Re})}{(1 - x_в)^{\mathrm{Re}} [2x_в \mathrm{Re}\,(\mathrm{Re} + 1) - (1 - x_в)(\mathrm{Re} + 1 - \exp(-\mathrm{Re}))]}.$$

Затем, подставляя это выражение в (7.21), получаем уравнение для $x_в$. Из уравнения (7.21) видно, что разрешить его относительно $x_в$ нельзя, поэтому решение в каждом конкретном случае находилось графически.

Таким образом, предлагаемый метод расчета позволил впервые получить теоретические зависимости радиуса воздушной полости развитой вихревой воронки в плоскости донного отверстия от радиального числа Рейнольдса и числа Колфа (рис. 7.30). Оказалось, что радиальное число Рейнольдса не влияет на размеры воздушного ядра вихревой воронки при $\mathrm{Re} \leqslant -3{,}5$, а величина $x_в$ в вязкой жидкости всегда меньше, чем соответствующее значение $x_в$ для идеальной жидкости. В заключение отметим, что ни один теоретический вывод не противоречит известным экспериментальным данным.

§ 6. РАЗВИТАЯ ВИХРЕВАЯ ВОРОНКА В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Помимо получения распределения тангенциальной скорости и профиля свободной поверхности жидкости явление воронкообразования имеет ряд аспектов, важных для применения вихревых воронок на практике. К ним относятся зависимость коэффициента расхода от интенсивности вращения и вязкости жидкости, проникновение воздушного ядра вихревой воронки в донное отверстие, связь между

коэффициентом расхода и радиусом воздушной полости в плоскости донного отверстия и т. д.

Несмотря на важность этих вопросов, число работ, посвященных их исследованию, крайне мало, при этом они носят, как правило, экспериментальный характер, что указывает на их определенную ограниченность. Ни в одной из немногих теоретических моделей эти вопросы не исследуются. Поэтому ряд важных экспериментальных фактов до сих пор не имеет теоретического подтверждения. Например, известно, что коэффициент расхода μ не зависит от относительной высоты H/r_0 [86] или что между μ и $x_в$ существует простая связь: $\mu/\mu_* = 1 - x_в$ [101]. Сюда же можно отнести и использование никак не обоснованных аппроксимационных зависимостей, например $\mu = f(\mathrm{Ko})$. Даже для идеальной жидкости не показано, почему в случае развитой воронки в области, расположенной над донным отверстием, можно пользоваться широко известным профилем свободной поверхности $h = 1 - \frac{\mathrm{const}}{x}$, который обычно выводится из условий на бесконечности.

Отметим, что само явление воронкообразования в основном сосредоточено вблизи оси вращения. Именно здесь наблюдается наибольшее искривление свободной поверхности и проявляется влияние вязкости жидкости. Поэтому дальнейшие исследования, как теоретические, так и экспериментальные, должны сосредоточиться вокруг изучения движения жидкости в области, расположенной над донным отверстием. К тому же при $\frac{r}{r_0} > 2$, как показывает эксперимент, течение жидкости близко к плоскому потенциальному вращению ($U_\varphi = \Gamma_0/r$, $U_r = Q/2\pi rH$), новые исследования в этой области вряд ли добавят новую информацию в практическом смысле. Сказанное выше не распространяется на исследование в этой области турбулентности и развитие входной струи при тангенциальном закручивании жидкости.

Таким образом, при создании новых теоретических моделей течения жидкости в вихревых воронках одним из главных требований, предъявляемых к ним, является возможность применения для описания не только полей скоростей и давлений, а и перечисленных аспектов воронкообразования.

В настоящем параграфе в рамках модели идеальной жидкости рассмотрим некоторые вопросы течения жидкости в развитой вихревой воронке. (Отметим, что в § 2 уже было проведено исследование проникновения воздушного ядра вихревой воронки в донное отверстие).

Рассмотрим уравнения плоского вращения идеальной жидкости в развитой вихревой воронке

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{U_r^2}{2}\right) - \frac{U_\varphi^2}{r} = -g\frac{dl}{dr}, \qquad (7.26)$$

$$U_r\frac{d(rU_\varphi)}{dr} = 0.$$

Второе уравнение имеет очевидное решение: $U_\varphi = \frac{\Gamma_0}{r}$. Приведем первое уравнение к безразмерному виду с учетом того, что $U_\varphi = \Gamma_0/r$, делая следующие замены переменных: $U_r = \frac{Q}{2\pi r_0 H}\bar{U}_r$, $U_\varphi = \frac{\Gamma_0}{r_0}\bar{U}_\varphi$; $l = hH$, $r = r_0\bar{r}$, а затем проинтегрируем его по r, находя константу интегрирования из условия $h = 1$ при $\bar{r} = \infty$ (в дальнейшем знак безразмерной величины опустим).

Получим

$$h = 1 - \frac{\mathrm{Ko}^2}{r^2} - \frac{\mathrm{Fr}}{4}\left(\frac{r_0}{H}\right)^3\frac{U_r^2}{2}. \qquad (7.27)$$

В плоском случае радиальную скорость можно выразить через радиальный расход и текущую высоту жидкости в вихревой воронке: $U_r = q/rh$.

В окончательном виде профиль свободной поверхности запишется следующим образом:

$$h = 1 - \left[\mathrm{Ko}^2 + \frac{\mathrm{Fr}}{8}\left(\frac{r_0}{H}\right)^3\frac{q^2}{h^2}\right]\frac{1}{r^2}. \qquad (7.28)$$

Большой практический интерес представляет создание метода теоретического расчета коэффициента расхода μ различного рода гидравлических систем при наличии в них вихревых воронок. Как известно, если воронка не проникает в донное отверстие, то μ не зависит от интенсивности вращения жидкости. И только после того как воздушное ядро проникло в донное отверстие, величина коэффициента расхода начинает уменьшаться по мере роста крутки потока. Так как обычно расчет вихревых воронок заключается в определении распределения тангенциальной скорости по радиусу и профиля свободной поверхности, то для связи этих характеристик с коэффициентом расхода необходимо дополнительное условие. Одна из идей создания такого условия вытекает из следующих соображений. Поскольку и коэффициент расхода, и радиус воздушного ядра вихревой воронки в плоскости донного отверстия подобным образом зависят от интенсивности вращения, то между ними должна существовать определенная связь, иначе $\mu = f(x_в)$. Такой простейшей связью является предложенная в [101] зависимость вида $\mu/\mu_* = 1 - x_в$, где $\mu_* = 0{,}63$ — коэффициент расхода при неразвитой вихревой воронке. Она получена из предположения, что коэффициент расхода, вычисленный не по всей площади донного отверстия, а только по площади живого сечения выходящей струи, есть величина постоянная.

Радиус воздушного ядра вихревой воронки в плоскости донного отверстия обычно находится по профилю свободной поверхности. Используя (7.28) с учетом (7.15), для величины $x_в$ получаем следующее уравнение:

$$x_в = \mathrm{Ko}^2 + \frac{\mathrm{Fr}}{4}\left(\frac{r_0}{H}\right)^3\frac{x_в}{(1 - x_в)^3}, \qquad (7.29)$$

или, разрешая его относительно $x_в$, находим

$$x_в = \frac{2 - \mathrm{Ko}^2}{3} - \sqrt[3]{-\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{3}\right)^3 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}} -$$

$$- \sqrt[3]{-\frac{\alpha}{2} - \sqrt{\left(\frac{\beta}{3}\right)^3 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}}, \qquad (7.30)$$

где $\alpha = -\frac{(1 - \mathrm{Ko}^2)}{3}$; $\beta = \frac{2}{3}(1 - \mathrm{Ko}^2)^3 + \frac{\mathrm{Fr}}{4}\left(\frac{r_0}{H}\right)^3$.

В случае, когда $\mathrm{Ko}^2 \gg \frac{\mathrm{Fr}}{4}\left(\frac{r_0}{H}\right)^3 \frac{x_в}{(1 - x_в)^2}$ (что выполняется для большинства реальных течений), зависимость (7.30) значительно упрощается: $x_в = \mathrm{Ko}^2$, значит, коэффициент расхода для идеальной жидкости в этом случае имеет вид

$$\frac{\mu}{\mu_*} = 1 - \mathrm{Ko}^2. \qquad (7.31)$$

Рассмотрим другой способ нахождения связи между μ и $x_в$ (по сути дела, учитывая то, что $x_в \cong \mathrm{Ko}^2$, между μ и Ko^2). Воспользуемся для этого принципом минимума потока кинетической энергии, предложенным М. А. Гольдштиком [33], для расчета радиуса воздушной полости в центробежной форсунке.

Поток кинетической энергии для вихревой воронки в неограниченном пространстве запишется в виде [33]

$$T = \pi\rho \int_{r_в}^{\infty} (U_\varphi^2 + U_z^2)\, rU_z dr = \pi\rho \left[\int_{r_в}^{r_0} (U_\varphi^2 + U_z^2)\, U_z r dr + \right.$$

$$\left. + \int_{r_0}^{\infty} (U_\varphi^2 + U_z^2)\, rU_z dr \right].$$

Поскольку вне донного отверстия $Uz \cong 0$, то второй интеграл тоже равен нулю. Величина $x_в$ находится из условия минимума функции $T = T(x_в)$, что приводит к следующему уравнению [33]:

$$\Lambda^2 = 1/2\,[(1 - x_в)^2 - x_в(1 - x_в)\ln x_в]/x_в, \qquad (7.32)$$

где $\Lambda = \frac{Q_1}{\pi \Gamma_0 r_0}$.

Заметим, что выражение для Λ можно преобразовать к виду

$$\Lambda = \frac{Q_1}{\pi r_0 \Gamma_0} = \frac{Q_1}{\pi r_0^2 \sqrt{2gH}} \, \frac{r_0 \sqrt{2gH}}{\Gamma_0} = \frac{\mu}{\mathrm{Ko}}.$$

Кроме того, как и ранее, $x_в = \mathrm{Ko}^2$. Это позволяет получить новую зависимость μ от Ko^2:

$$\mu = \sqrt{0{,}5\,[(1 - \mathrm{Ko}^2) + \mathrm{Ko}^2(1 - \mathrm{Ko}^2)\ln \mathrm{Ko}^2]}. \qquad (7.33)$$

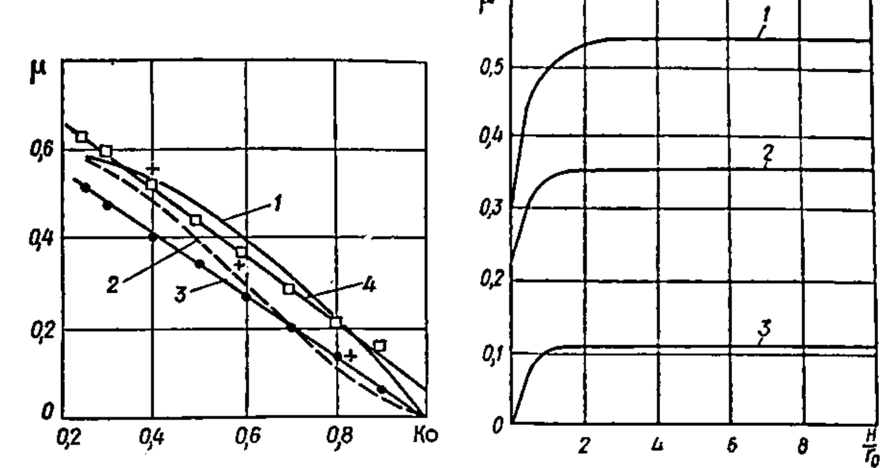


Рис. 7.31. Зависимость коэффициента расхода μ от числа Колфа Ko:
1 — $\mu/\mu_* = 1 - \mathrm{Ko}^2$; 2 — по (7.33); 3 — [161]; 4 — [86].

Рис. 7.32. Зависимость коэффициента расхода μ от параметра H/r_0 при различных Ko:
1 — 0,318; 2 — 0,637; 3 — 0,891.

Сравнение зависимостей (7.33) и $\mu/\mu_* = 1 - \mathrm{Ko}^2$ показывает их значительное отличие (рис. 7.31). На рисунке приведено сравнение теоретических данных с аппроксимационными зависимостями Стивенса и Колфа [161] ($\mu/\mu_* = 1{,}09 - 1{,}09$ Ko), А. Д. Альтшуля и М. Ш. Марголина [86] ($\mu/\mu_* = 1{,}3 - 1{,}19$ Ko). Заметим, что при анализе данных нужно учитывать тот факт, что в реальном течении $x_в < x_{в\,ид}$, значит, $\mu > \mu_{ид}$. Поэтому экспериментальные точки должны располагаться выше кривой $\mu = f$ (Ko), полученной для идеальной жидкости.

Из рис. 7.31 видно, что использование принципа минимума потока кинетической энергии лучше согласовывается с экспериментальными данными, при этом зависимость (7.33) на участке $0{,}35 < \mathrm{Ko} < 0{,}9$ близка к линейной ($\mu/\mu_* = 1{,}365 - 1{,}468$ Ko). Отличие теоретических коэффициентов в аппроксимационной зависимости от экспериментальных [86, 161] составляет в среднем около 13 %. На рис. 7.31 нанесены значения коэффициента расхода, вычисленные по формуле (7.33), и значения $x_в$, рассчитанные для вязкой жидкости по методу, изложенному в § 5. Оказалось, что с ростом числа Колфа Ko величина расчетного μ стремится к $\mu_{ид}$, что объясняется общей тенденцией стремления течения к аналогичному течению в идеальной жидкости с увеличением интенсивности вращения.

Таким образом, анализ полученных данных показывает, что предложенная в [101] связь между коэффициентом расхода и радиусом воздушного ядра в плоскости донного отверстия является грубой. Более приемлемые результаты при вычислении величины μ дает использование принципа минимума потока кинетической энергии.

Однако условия $\mu/\mu_* = 1 - x_в$ достаточно, чтобы теоретически показать независимость коэффициента расхода μ от параметра H/r_0 при определенных значениях H/r_0. Для этого в уравнение (7.27) подставим распределение радиальной скорости в виде $U_r = 1/r$, а параметр $\frac{\mathrm{Fr}}{8}\left(\frac{r_0}{H}\right)^3$ преобразуем следующим образом:

$$\frac{\mathrm{Fr}}{8}\left(\frac{r_0}{H}\right)^3 = \frac{Q_1^2}{8\pi^2 g r_0^5}\left(\frac{r_0}{H}\right)^3 = \frac{\mu^2\pi^2 r_0^4 2gH}{8\pi^2 g r_0^5}\left(\frac{r_0}{H}\right)^3 = \frac{\mu^2}{4}\left(\frac{r_0}{H}\right)^2.$$

С учетом этого получим уравнение для коэффициента расхода μ

$$x_в = 1 - \frac{\mu}{\mu_*} = \mathrm{Ko}^2 + \frac{\mu^2}{4}\left(\frac{r_0}{H}\right)^2,$$

решение которого имеет вид

$$\mu = 2\sqrt{\frac{1}{\mu_*^2}\left(\frac{H}{r_0}\right)^4 + \left(\frac{H}{r_0}\right)^2(1 - \mathrm{Ko}^2)} - \frac{2}{\mu_*}\left(\frac{H}{r_0}\right)^2. \qquad (7.34)$$

Построенные по формуле (7.34) зависимости μ от $\frac{H}{r_0}$ при различных значениях числа Ko приведены на рис. 7.32. Из них следует, что при значениях $H/r_0 \gtrsim 3$ коэффициент расхода практически не зависит от H/r_0 и совпадает с вычисленным по формуле $\mu/\mu_* = 1 - \mathrm{Ko}^2$. В работе [86] экспериментально установлены пределы автомодельности коэффициента расхода по параметру $H/r_0 : 5 < H/r_0 < \infty$, что совпадает с результатом проведенной теоретической оценки.

§ 7. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНОЙ ВЯЗКОСТИ И ДРУГИЕ ОСОБЕННОСТИ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ВИХРЕВЫХ ВОРОНКАХ

Как уже отмечалось в § 1 данной главы, уравнения для нахождения вращательной скорости (7.4) и профиля свободной поверхности (7.8) были получены из системы уравнений Навье — Стокса, которые справедливы при ламинарном режиме течения жидкости. Однако практически во всех случаях течение в вихревых воронках происходит в турбулентном режиме, что, естественно, вызывает вопрос о применимости полученных расчетных зависимостей. Часть ответа на этот вопрос дана в § 1. В настоящем параграфе попытаемся установить условия применимости гипотезы о постоянстве турбулентной вязкости к описанию течения в вихревых воронках.

При обработке экспериментальных данных турбулентную вязкость обычно вычисляют по корреляции $\overline{U'_\varphi U'_r}$ и распределению тангенциальной скорости $U_\varphi(r)$. Возможен и другой способ, когда для нахождения турбулентной вязкости достаточно знать только распределение $U_\varphi(r)$.

Рассмотрим уравнение тангенциальной скорости из системы уравнений Рейнольдса для плоского случая

$$\frac{U_r}{r}\frac{d(rU_\varphi)}{dr} - \nu\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rU_\varphi)\right) = -\frac{d\overline{U'_\varphi U'_r}}{dr} - 2\frac{\overline{U'_\varphi U'_r}}{r}.$$

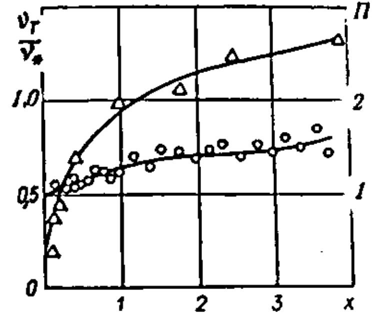


Рис. 7.33. Распределение турбулентной вязкости $\nu_т$ в развитой вихревой воронке, построенное по (7.35):

Δ — экспериментальные значения циркуляции тангенциальной скорости П, О — значения расчетного $\nu_т$.

Это выражение представляет собой дифференциальное уравнение относительно корреляции $\overline{U'_\varphi U'_r}$, которая, в свою очередь, равна $\overline{U'_\varphi U'_r} = -\nu_т r\frac{d}{dr}\left(\frac{U_\varphi}{r}\right)$. Для нахождения $\nu_т$ решим уравнение (7.7а) относительно $\overline{U'_\varphi U'_r}$, сделав, как и ранее, следующие замены: $\Pi = \frac{U_\varphi r}{\Gamma_0}$, $x = (r/r_0)^2$. При интегрировании примем, что $U_r = Q_1/2\pi rH$ $(r \geqslant r_0)$; $U_r = Q_1 r/2\pi r_0^2 H$ $(r \leqslant r_0)$.

Получим

$$\begin{cases} \dfrac{\nu_т}{\nu_*} = \dfrac{\Pi - \nu/\nu_*\Pi' + c_1}{x\Pi' - \Pi}, & x \geqslant 1, \quad \nu_* = \dfrac{Q_1}{4\pi H}, \\ \dfrac{\nu_т}{\nu_*} = \dfrac{x\Pi - \int \Pi dx - \nu/\nu_*\Pi' + c_2}{x\Pi' - \Pi}, & x \leqslant 1. \end{cases} \qquad (7.35)$$

Константа интегрирования c_1 ищется из условия $\nu_т(0) = 0$, а константа c_2 — из равенства $\nu_т$ для обоих выражений (7.35) в точке $x = 1$.

Обратим внимание на то, что при $U_\varphi \to x$ $\overline{U'_\varphi U'_r} \to 0$, а при $U_\varphi \to 1/r$ $\overline{U'_\varphi U'_r} \to 1/r^2$, соответственно $\nu_т \to \mathrm{const}$. Значит, вблизи оси вращения пульсации скорости резко уменьшаются (так как в этой области течение стремится к «твердому» вращению), а на значительном удалении от оси вращения турбулентная вязкость примерно постоянна (поскольку течение стремится к потенциальному вращению).

На рис. 7.33 приведено распределение турбулентной вязкости по радиусу неразвитой вихревой воронки, построенное по формулам (7.35), и экспериментальному распределению циркуляции тангенциальной скорости, полученному с помощью лазерного допплеровского измерителя скорости.

Сравнение данных о турбулентной вязкости в вихревой воронке с данными исследований других закрученных течений показывает, что турбулентная структура закрученного течения зависит от его вида, т. е. от того, где производится закручивание потока и как организовано осерадиальное течение. Оказалось, что гипотезой о постоянстве турбулентной вязкости можно пользоваться в том случае,

или в той области, где осевая скорость по крайней мере имеет одинаковый знак. Более жестким требованием может служить требование приблизительного постоянства U_z, например, в пределах $\Delta U_z/U_z \leqslant 50$ %. Вблизи же оси вращения происходит подавление турбулентности и соответственно гипотеза постоянства не выполняется.

Таким образом, гипотеза о постоянстве турбулентной вязкости наиболее подходит для описания течения в развитых вихревых воронках, океанических вихрях и центробежных форсунках. Применение ее к циклонным камерам (особенно газовым) и неразвитым вихревым воронкам требует обязательного разбиения течения на характерные зоны.

Рассмотрим теперь две особенности течения жидкости в вихревой воронке, которые вытекают из полученных ранее решений.

В § 1 в результате интегрирования основного уравнения (7.4) получили следующее распределение циркуляции тангенциальной скорости (7.5) в области $x \geqslant 1$:

$$\Pi_2 = c_{21}\frac{(x-a)^{\mathrm{Re}+1}}{\mathrm{Re}+1} + 1,$$

справедливое как для неразвитой, так и для развитой вихревой воронки.

Известно, что высота жидкости в вихревой воронке по мере удаления от оси вращения стремится к постоянной величине $h(\infty) = 1$. Значит, необходимо, чтобы функция $\Pi(x)$ удовлетворяла условию $\Pi(x) \leqslant 1$ для всех x, из которого следует, что $\mathrm{Re} = -\frac{Q_1}{4\pi\nu_\text{т}H} < -1$. При $\mathrm{Re} > -1$ будет наблюдаться неограниченный рост циркуляции тангенциальной скорости, который приведет к тому, что высота жидкости на бесконечности будет неограниченной, а это не соответствует физической картине явления.

Следовательно, одной из особенностей течения жидкости в вихревых воронках является то, что турбулентная структура течения реализуется таким образом, что турбулентная вязкость не может быть больше, чем $\nu_\text{т} \leqslant \frac{Q_1}{4\pi H}$.

Для установления второй особенности течения жидкости в вихревой воронке рассмотрим следующую задачу. Пусть происходит закрученное истечение жидкости через круглое отверстие в дне, представляющее собой неограниченную плоскость. Значения высоты жидкости, циркуляции тангенциальной скорости и расхода на бесконечном удалении от донного отверстия равны H, Γ_0 и Q_1 соответственно. Необходимо установить, как будет изменяться физическая картина течения при неограниченном росте Γ_0. Возможны два решения поставленной задачи.

Первое получается путем следующих рассуждений. Из эксперимента известно, что чем больше число Колфа Ко, тем больше радиус воздушного ядра вихревой воронки в плоскости донного отверстия (для идеальной жидкости эта зависимость близка к линейной $r_\text{в} = \mathrm{Ко}$). Значит, по мере роста Γ_0 должен наступить момент, когда

$\mathrm{Ко} > 1$. Поскольку в этом случае радиус воздушного ядра больше радиуса донного отверстия, то истечение жидкости прекратится. А это приведет к тому, что высота жидкости H начнет увеличиваться вследствие радиального притока. При фиксированном Γ_0 этот рост будет продолжаться до тех пор, пока значение числа $\mathrm{Ко} = \frac{\Gamma_0}{r_0\sqrt{2gH}}$ не уменьшится до величины, меньшей единицы. Истечение жидкости восстановится. Значит, в первом случае получаем некоторое пульсирующее течение с непрерывным ростом высоты жидкости на бесконечности.

Во втором случае предположим, что рост высоты жидкости на бесконечности начинает происходить с некоторого $\mathrm{Ко}_\text{пред}$, причем таким образом, что для всех Γ_0 $\mathrm{Ко} \leqslant \mathrm{Ко}_\text{пред}$. Физически это означает, что с ростом циркуляции тангенциальной скорости на бесконечности будут наблюдаться рост высоты жидкости и постоянство радиуса воздушной полости вихревой воронки в плоскости донного отверстия. (Соответственно не будет изменяться и коэффициент расхода).

Анализ обоих решений и сопоставление с известными экспериментальными данными показывают, что реальная картина течения будет соответствовать второму случаю.

Таким образом, второй особенностью течения жидкости в вихревой воронке является то, что величина числа Колфа не может быть больше некоторой величины $\mathrm{Ко}_\text{пред}$. Для идеальной жидкости $\mathrm{Ко}_\text{пред} = 1$, а для вязкой предельное число Колфа должно быть несколько большим вследствие того, что при одном и том же Ко радиус воздушной полости вихревой воронки для вязкой жидкости всегда меньше, чем для идеальной (рис. 7.30, *а*).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вопросы, затронутые в этой книге, связаны с поведением свободных поверхностей, которые образуются в различного рода течениях. Рассматриваемые свободные поверхности, как правило, стационарны, как стационарны и течения, в которых они возникают. Если силами тяжести пренебречь, то эти свободные поверхности образуют осесимметричные каверны. Методы их расчета были предметом главы второй. В ней изложено несколько различных подходов и позже дан анализ этих методов, хотя предпочтение было отдано методам, основанным на применениях законов сохранения энергии. Такой подход приводит к приближенным решениям, однако они оказываются вполне пригодными для инженерной практики.

Упомянутые методы, конечно, далеки от совершенства и, например, метод вихревых особенностей дает гораздо более точные результаты. Однако он во много раз более труден, значительно менее удобен в практическом использовании, и в то же время, как и энергетические методы, не может дать реальной картины течения. Когда твердое тело обтекается установившимся потоком жидкости без образования свободных поверхностей, то поле течения полностью определяется числом Рейнольдса. Если же при этом возникают свободные поверхности, которые образуют каверну, то в качестве второго определяющего параметра появляется число кавитации. Следовательно, течение и форму каверны однозначно должны определять эти два параметра, хотя в общем случае необходимо еще привлечь число Фруда. Поэтому те решения, которые не учитывают всех трех параметров одновременно, могут давать лишь некоторое приближение к реально существующему явлению. Упомянутые методы не дают зависимости решения ни от числа Рейнольдса, ни от числа Фруда и поэтому их результаты в той или иной мере приближенны. Такая ситуация зачастую дает основание применять более простые, хотя и менее точные методы в модели идеальной жидкости. Тогда более сложные и точные выступают как некоторые эталоны, позволяющие оценивать приближенные методы или строить их. В этом непреходящее значение и ценность так называемых «точных» методов.

Хотелось бы отметить, что всюду шла речь о развитых кавернах и совершенно не обращалось внимания на вопросы образования и развития каверн. Тем не менее эти вопросы очень важные и нужные. Особенно это касается каверн, рассмотренных в третьей главе при движении кавернообразующего тела вдоль или против вектора ускорения силы тяжести. Здесь исследовались только такие каверны, которые в данной форме существуют лишь ограниченное время, ибо по существу они нестационарны. При движении вниз, если отвлечься от влияния горизонтальной свободной границы, каверна будет сокращаться. Вопрос об уменьшении размеров каверны и об эволюции ее формы в этом случае тоже не рассматривался, но сам по себе он очень важен и требует пристального к себе внимания. Не менее важным является также вопрос об эволюции формы всплывающей каверны. В главе третьей она рассмотрена тоже в стационарном режиме, отвлекаясь от того, как осуществить это стационарное движение. Изложенная здесь теория пригодна лишь для тех движений, которые обеспечивают образование тонкой каверны. Но очень интересно было бы рассмотреть такие нестационарные режимы, когда каверна перестает быть тонкой, превращается в подобие пузыря, который в своем движении вверх может даже обогнать тело, в свое время образовавшее каверну. Конечно, те методы, которые здесь изложены, не дают возможности пока что исследовать все аспекты этого очень сложного и не менее важного движения.

К числу проблем, нуждающихся в более совершенных решениях, чем были получены в этой книге, следует также отнести и задачу определения формы свободных границ, возникающих при движении кавернообразующих тел со сложной конфигурацией сечения срыва. Методы теории малых возмущений не могут быть обоснованно распространены на более-менее значительные их величины, что часто встречается в инженерной практике.

Наконец, совсем мало изучено влияние вязкости жидкости на поведение свободных границ, образующих тонкие каверны. Хотя и принято считать, что вязкость заметного влияния на форму каверны не оказывает, однако тщательному анализу этот вопрос не был подвергнут. Тем более, что возможности к этому имеются. Здесь можно было бы пойти по пути, которым шли исследователи, занимавшиеся движением газовых пузырей в вязких жидкостях.

Применение теории тонкого тела к исследованию несущих систем позволяет существенно упростить их расчет и получить ряд интересных результатов, касающихся их взаимодействия с криволинейными границами. К сожалению, принятые в изложенной теории допущения сужают область применимости результатов, ограничивая ее малыми удлинениями и углами атаки и пологими границами.

Поэтому уточнение этой теории, которое позволило бы применять ее в более широком диапазоне удлинений, углов атаки и форм границ, представляет большой интерес.

Конечность удлинения можно учесть, оставляя в уравнениях обтекания члены более высокого порядка малости по удлинению,

как это сделано в ряде опубликованных работ для случая крыла в безграничной жидкости и крыла у плоской поверхности.

Наиболее существенным моментом, с которым сталкиваемся при попытке учесть конечность угла атаки, является определение положения свободных вихрей. Теоретическое решение этой задачи оказывается достаточно сложным даже в случае безграничной жидкости, поэтому здесь целесообразно ограничиться приближенными схемами.

Еще одной причиной, приводящей к появлению свободных поверхностей в жидкости, может быть ее вращательное движение. В седьмой главе рассмотрен способ расчета профиля свободной поверхности и поля вращательных скоростей жидкости в развитой и неразвитой вихревых воронках, а также другие аспекты явления воронкообразования, например, поглощение вихревыми воронками твердых плавающих тел. Вне рассмотрения осталось осе-радиальное течение.

Условие постоянства вращения жидкости по высоте приводит к тому, что система уравнений Навье—Стокса может быть разделена на три обыкновенных дифференциальных уравнения, одно их которых описывает осе-радиальное течение. Чем точнее будет решено это уравнение, тем точнее можно установить распределение тангенциальной скорости и профиль свободной поверхности.

Гидродинамическое взаимодействие твердых плавающих тел с вихревыми воронками дает также интересное явление наличия радиусов равновесия для твердых тел. Некоторые соображения по их определению были нами указаны, однако в общем этот вопрос остается открытым. Причиной тому — не выясненная до конца физическая картина явления, которая должна стать предметом дальнейших исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Альтшуль А. Д., Марголин М. Ш.* Обобщенная формула распределения окружных скоростей в вихревых воронках.— Инж.-физ. журн., 1970, 18, № 4, с. 731—733.

2. *Амромин Э. Л.* Расчет осесимметричных кавитационных течений в свободных струях методом А. Н. Иванова.— В кн.: Гидродинамика высоких скоростей. Л. : Судостроение, 1983, вып. 3, с. 4—13. (Тр. НТО им. Крылова).

3. *Амромин Э. Л., Иванов А. Н.* Осесимметричное обтекание тел в режиме развитой кавитации.— Изв. АН СССР. Сер. Механика жидкости и газа, 1975, № 3, с. 37—42.

4. *Амромин Э. Л., Иванов А. Н.* Осесимметричное кавитационное обтекание тела в трубе.— Там же, 1976, № 4, с. 50—55.

5. *Балуев Е. Д., Троянкин Ю. В.* Исследование аэродинамической структуры газового потока в циклонной камере.— Теплоэнергетика, 1967, № 1, с. 18—20.

6. *Башарова В. Н.* Пространственные кавитационные течения за произвольно ориентированными некруговыми кавитаторами.— В кн.: Математические методы исследования гидродинамических течений : Сб. науч. тр. Киев : Наук. думка, 1978, с. 41—45.

7. *Башарова В. Н., Буйвол В. Н., Власенко Ю. Д., Шевчук Ю. Р.* Численные методы в некоторых задачах гидродинамики течений со свободными границами.— В кн.: Тез. докл. на Всесоюз. конф. по применению ЭВМ и числ. методов в гидромеханике корабля : Крылов. чтения, 1977. Л. : Судостроение, 1977, с. 83—84.

8. *Башарова В. Н., Буйвол В. Н., Серебряков В. В.* Тонкие осесимметричные каверны при обтекании тел в продольном поле силы тяжести.— Прикл. механика, 1983, 19, № 4, с. 86—94.

9. *Башарова В. Н., Власенко Ю. Д.* Кавитационные течения за пластинчатыми кавитаторами произвольной формы.— Там же, 1980, 16, № 5, с. 140—144.

10. *Белоцерковский С. М.* Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа.— М. : Наука, 1965.— 242 с.

11. *Биркгоф Г., Сарантонелло Э.* Струи, следы, каверны.— М. : Мир, 1964.— 466 с.

12. *Болдырев А. А.* Экспериментальное исследование каверн за диском, движущимся с ускорением.— Учен. зап. ЦАГИ*, 1973, 4, № 6, с. 119—123.

13. *Болотин А. Ф.* О форме каверны за осесимметричным кавитатором при конечном числе Фруда.— В кн.: Тез. докл. на XXIV Всесоюз. науч.-техн. конф. по теории корабля : Крылов. чтения, 1975. Л. : Судостроение, 1975, с. 37—38.

14. *Болотин А. Ф., Дианов Д. И.* Экспериментальное исследование искусственных каверн за дисками при различных углах наклона набегающего потока к горизонтали.— В кн.: Экспериментальная гидромеханика судна : Материалы по обмену опытом. Л. : Судостроение, 1975, с. 63—70 (Науч.-техн. о-во им. акад. А. Н. Крылова; Вып. 226).

15. *Буйвол В. М.* Про форму тонких просторових каверн у важкій рідині за несиметрично розташованим кавітатором.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1974, № 9, с. 798—801.

* ЦАГИ — Центральный аэрогидродинамический институт.

16. *Буйвол В. Н.* Тонкая каверна в весомой жидкости за кавитаторами некругового сечения.— Гидромеханика, 1974, вып. 30, с. 67—71.
17. *Буйвол В. Н.* Колебания и устойчивость деформируемых систем в жидкости.— Киев : Наук. думка, 1975.— 190 с.
18 *Буйвол В. Н.* Тонкие каверны в течениях с возмущениями.— Киев : Наук. думка, 1980.— 295 с.
19. *Буйвол В. Н., Власенко Ю. Д., Журавлев Ю. Ф., Шевчук Ю. Р.* Тонкие каверны за эллиптическими кавитаторами.— Прикл. механика, 1978, 14, № 10, с. 110—118.
20. *Буйвол В. Н., Журавлев Ю. Ф., Капанкин Е. Н.* Возмущенное движение тонких пространственных каверн.— В кн.: Неустановившиеся течения воды с большими скоростями. М. : Наука, 1973, с. 153—163.
21. *Буйвол В. Н., Лапин В. А., Шевчук Ю. Р.* О форме тонких пространственных каверн за круговым диском в весомой жидкости.— Прикл. механика, 1976, 12, № 6, с. 105—110.
22. *Буйвол В. Н., Степанский П. М.* Об уравнениях возмущений границы каверны, движущейся вблизи твердой стенки.— Гидромеханика, 1973, вып. 24, с. 51—56.
23. *Буйвол В. Н., Шевчук Ю. Р.* Возмущение формы каверны при движении в весомой жидкости.— Прикл. механика, 1972, 8, № 7, с. 92—97.
24. *Буйвол В. М., Шевчук Ю. Р.* Про вплив кута атаки на деформацію тонких просторових каверн у вагомій рідині.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1974, № 2, с. 142—146.
25. *Буйвол В. Н., Шевчук Ю. Р.* Определение формы развитых каверн с учетом сил тяжести и поверхностного натяжения.— Изв. АН СССР. Сер. Механика жидкости и газа, 1977, № 4, с. 174—177.
26. *Буйвол В. Н., Шевчук Ю. Р.* Деформация каверны за наклонным кавитатором.— Гидромеханика, 1981, вып. 43, с. 3—10.
27. *Вакман Д. Е.* Асимптотические методы в линейной радиотехнике.— М. : Сов. радио, 1962.— 247 с.
28. *Василишин Т. М.* О моделировании воронкообразования.— Гидротехн. стр-во, 1953, № 8, с. 34—37.
29. *Васильев О. Ф.* Приложение теории винтового движения жидкости к задаче об истечении через отверстие с образованием воздушной воронки.— Изв. АН СССР. Сер. Отд-ние техн. наук, 1957, № 3, с. 108—114.
30. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости.— М. : Мир, 1967.— 310 с.
31. *Ву Т. Я.* Кавитационные и спутные течения.— Сб. пер. и обзоров иностр. период. лит. Механика, 1973, № 5, с. 48—86.
32. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи.— М. : Физматгиз, 1963.— 639 с.
33. *Гольдштик М. А.* Вихревые потоки.— Новосибирск : Наука, 1981.— 366 с.
34. *Гошев Г. А.* О деформации поверхности воды за подводным крылом конечного размаха.— Изв. АН СССР. Сер. Механика жидкости и газа, 1966, № 2, с. 73—77.
35. *Гибсон А.* Гидравлика и ее приложения.— М. ; Л. : Энергоиздат, 1934.— 609 с.
36. *Григорян С. С.* Приближенное решение задачи об отрывном обтекании осесимметричного тела.— Прикл. математика и механика, 1959, 23, № 5, с. 951—953.
37. *Гузевский Л. Г.* Численный анализ кавитационных течений. Новосибирск, 1979.— 36 с.— (Препринт / Ин-т теплофизики СО АН СССР.; 40—79).
38. *Гузевский Л. Г.* Влияние стенок на плоские осесимметричные кавитационные течения.— В кн.: Пристенные течения со свободными поверхностями. Новосибирск : Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1980, с. 5—17.
39. *Гузевский Л. Г., Зуйкова В. Н.* Кавитационные течения в продольном поле силы тяжести.— Там же, с. 18—30.
40. *Гульнев С. И., Капанкин Е. Н.* Об особенностях кавитационного обтекания тел вертикальным потоком жидкости.— Учен. зап. ЦАГИ, 1975, 6, № 2, с. 56—62.
41. *Гуревич М. И.* Теория струй идеальной жидкости.— М. : Физматгиз, 1961.— 494 с.
42. *Гуревич М. И.* Теория течений со свободными границами.— В кн.: Гидромеханика. М.: 1971, с. 32—114. (Итоги науки / ВИНИТИ ; Вып. 5).

43. *Гуревич М. И., Степанов Г. Ю.* Краткий обзор современных работ по теории струй идеальной жидкости.— Тр. семинара по обрат. краевым задачам, 1980, вып. 7, с. 55—70.
44. *Дианов Д. И.* Влияние границ потока на деформацию и поддувные характеристики развитых искусственных каверн в весомой жидкости.— В кн.: Тез. докл. на Всесоюз. науч.-техн. конф. по вопр. повышения пропульсив. качеств и эксплуатац. характеристик отечеств. перспектив. судов : Крылов. чтения, 1978. Л.: Судостроение, 1978, с. 56—58.
45. *Дорфман Л. А.* Гидродинамическое сопротивление и теплоотдача вращающихся тел.— М. : Физматгиз, 1960.— 260 с.
46. *Егоров И. Т., Соколов В. Т.* Гидродинамика быстроходных судов.— Л. : Судостроение, 1971.— 422 с.
47. *Єфремов І. І.* Лінеаризована теорія кавітаційного обтікання.— К. : Наук. думка, 1974.— 156 с.
48. *Ефремов И. И., Серебряков В. В.* О форме тонких каверн при малых числах кавитации в плоском и осесимметричном потоках.— Гидромеханика, 1978, вып. 38, с. 82—85.
49. *Жилин Ю. Л.* Крыло минимального индуктивного сопротивления вблизи поверхности земли.— Изв. АН СССР. Сер. Механика и машиностроение, 1964, № 1, с. 148—150.
50. *Журавлев Ю. Ф.* Методы теории возмущений в пространственных струйных течениях.— Тр. ЦАГИ, 1973, вып. 1532, с. 1—22.
51. *Журавлев Ю. Ф.* О деформации тонкой осесимметричной каверны при волнении.— Там же, 1977, вып. 1889, с. 12—23.
52. *Журавлев Ю. Ф., Буйвол В. Н.* Геометрия каверны за кавитатором с некруговым поперечным сечением.— Там же, с. 3—11.
53. *Задачи* и методы гидродинамики подводных крыльев и винтов / Под ред. В. М. Ивченко, А. Н. Панченкова.— Киев : Наук. думка, 1966.— 160 с.
54. *Зинчук П. И.* Движение V-образного крыла вблизи твердого экрана с оптимальным распределением циркуляции. — В кн.: Гидроаэродинамика несущих поверхностей. Киев : Наук. думка, 1966, с. 174—187.
55. *Иванов А. Н.* Гидродинамика развитых кавитационных течений.— Л. : Судостроение, 1980.— 237 с.
56. *Иванов В. В.* Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. — Киев : Наук. думка, 1968.— 286 с.
57. *Капанкин Е. Н., Нестерук И. Г.* К расчету тонкой осесимметричной «вертикальной» каверны в тяжелой жидкости.— Тр. ЦАГИ, 1980, вып. 2060, с. 25—29.
58. *Карликов В. П., Шоломович Г. И.* Метод приближенного учета влияния стенок при кавитационном обтекании тел в гидродинамических трубах.— Изв. АН СССР. Сер. Механика жидкости и газа, 1966, № 4, с. 89—93.
59. *Карликов В. П., Хомяков А. Н., Шоломович Г. И.* О новом методе визуализации потоков капельной жидкости и измерении поля скоростей.— Там же, 1982, № 2, с. 101—108.
60. *Карпов К. А.* Таблицы функции $F(z) = \int_0^z e^{x^2}\, dx$ в комплексной области. — М. : Изд-во АН СССР, 1954.— 536 с.
61. *Кириевский Б. А., Глущенко В. Г., Черкасский В. Л. и др.* А. с. 821034 (СССР). Литниковая система для суспензионного литья.— Опубл. в Б. И., 1981, № 14, с. 63.
62. *Киселев О. М., Котляр Л. М.* Нелинейные задачи теории струйных течений тяжелой жидкости.— Казань : Изд-во Казан. ун-та, 1978.— 156 с.
63. *Королев В. И., Власенко Ю. Д., Бойко В. Т.* Экспериментальное исследование развитой каверны при нестационарной газовой кавитации.— Гидромеханика, 1973, вып. 24, с. 79—83.
64. *Костюков А. А.* Теория корабельных волн и волнового сопротивления.— Л. : Судпромгиз, 1959.— 311 с.
65. *Кочина И. Н.* О волнах на поверхности раздела двух жидкостей, текущих под углом друг к другу.— Прикл. математика и механика, 1955, 19, вып. 5, с. 628—634.

66. *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике.— М. : Мир 1972.— 274 с.
67. *Котляр Л. М.* Об одном случае струйного течения тяжелой жидкости.— Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа, 1975, № 3, с. 140.
68. *Котляр Л. М., Троепольская О. В.* Несимметричное кавитационное обтекание пластины потоком тяжелой жидкости.— Прикл. механика, 1975, № 9, с. 73—81.
69. *Кнэпп Р., Дейли Дж., Хеммит Ф.* Кавитация.—М. : Мир, 1974.— 688 с.
70. *Крылов В. В.* Об одном методе решения осесимметричных и плоских струйных задач.— Тр. ЦАГИ, 1963, вып. 897, с. 3—40.
71. *Кузнецов А. В.* Малые колебания контура, обтекаемого с отрывом струй.— В кн.: Современные вопросы гидродинамики. Киев: Наук. думка, 1967. с. 273—281
72. *Кузнецов А. В.* Вход тонкого тела в воду : Плоская задача.— Тр. семинара по краевым задачам, 1977, вып. 14, с. 141—160.
73. *Кузнецов А. В., Киселев О. М., Котляр Л. М., Терентьев А. Г.* Теоретические исследования нелинейных задач течения жидкости со свободными границами.— В кн.: Неустановившиеся течения воды с большими скоростями. М. : Наука, 1973, с. 253—266.
74. *Кузнецов Б. Г., Шепеленко В. Н., Яненко Н. Н.* Расчет формы каверны в поле тяготения с учетом поверхностного натяжения.— Изв. Сиб. отд-ния АН СССР. Сер. техн. наук, 1967, 3, № 13, с. 58—61.
75. *Ламб Г.* Гидродинамика.— М. : Гостехиздат, 1947.— 928 с.
76. *Лапин В. А., Липский В. К.* О ширине каверны за пространственным неосесимметричным насадком.— В кн.: Экспериментальная гидромеханика судна : Материалы по обмену опытом. Л. : Судостроение, 1975, с. 71—79 (Науч.-техн. о-во им. акад. А. Н. Крылова ; Вып. 226).
77. *Лапин В. А., Эпштейн Л. А.* Влияние поверхностного натяжения на основные геометрические размеры каверн за осесимметричными насадками.— Там же, с. 80—87.
78. *Лено Ч., Стрит Р.* Нелинейная теория симметрического течения в поле сил тяжести.— Сб. пер. и обзоров иностр. период. лит. Механика, 1967, № 3, с. 45—69.
79. *Логвинович Г. В.* Подъемная сила при кавитации.— Тр. ЦАГИ, 1964, вып. 942, с. 3—11.
80. *Логвинович Г. В.* Гидродинамика течений со свободными границами.— Киев : Наук. думка, 1969.— 209 с.
81. *Логвинович Г. В.* Вопросы теории тонких осесимметричных каверн.— Тр. ЦАГИ, 1976, вып. 1797, с. 3—17.
82. *Логвинович Г. В., Буйвол В. Н.* Гидромеханика кавитационных течений с возмущениями.— В кн.: Современные проблемы гидромеханики и гидротехники. Киев : Наук. думка, 1977, с. 16—28.
83. *Логвинович Г. В., Серебряков В. В.* О методах расчета тонких осесимметричных каверн.— Гидромеханика, 1975, вып. 32, с. 47—54.
84. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа.— М. : Наука, 1978.— 736 с.
85. *Майлс Дж. У.* Потенциальная теория неустановившихся сверхзвуковых течений.— М. : Физматгиз, 1963.— 271 с.
86. *Марголин М. Ш.* Моделирование и расчет вихревых воронок на гидротехнических сооружениях.— Тр. Гидропроекта, 1972, № 23, с. 60—65.
87. *Матинян С. М.* Метод измерения пространственного поля скоростей в неустановившемся потоке в условиях воронкообразования.— Изв. АН АрмССР, 1955, 8, № 2, с. 63—84.
88. *Меншиков В. И.* О вихревых системах плоской пластины.— Учен. зап. ЦАГИ, 1976, 7, № 5, с. 127—132.
89. *Мигиренко Г. С., Козюк Г. С., Мальцев Л. И. и др.* Некоторые способы управления кавитационным течением при малых числах Фруда.— В кн.: Неустановившиеся течения воды с большими скоростями. М. : Наука, 1973, с. 361—368.
90. *Милович А. Я.* Теория динамического взаимодействия тел и жидкости.— М. : Госстройиздат, 1955.— 310 с.
91. *Некрасов А. Н.* Теория крыла в нестационарном потоке.— Собр. соч. : В 2-х т. М. : Изд-во АН СССР, 1962, т. 2, с. 706.
92. *Нестерук И. Г.* К вопросу о форме тонкой осесимметричной каверны в весомой жидкости.— Изв. АН СССР. Сер. Механика жидкости и газа, 1979, № 6, с. 133—136.

93. *Нестерук И. Г.* Некоторые задачи осесимметричных кавитационных течений.— Там же, 1982, № 1, с. 28—34.
94. *Никулин В. В.* Взаимодействие линейного вихря со свободной поверхностью.— Динамика неоднород. жидкости, 1979, вып. 42, с. 31—42.
95. *Нилсен Дж.* Аэродинамика управляемых снарядов.— М. : Оборонгиз, 1962.— 474 с.
96. *Панченков А. Н.* Гидродинамика подводного крыла.— Киев : Наук. думка, 1965.— 552 с.
97. *Парышев Э. В., Рыков В. Н.* Проверка применимости одного метода расчета каверн к задаче Рябушинского для конусов.— Тр. ЦАГИ, 1976, вып. 1797, с. 18—25.
98. *Перельман Р. Г.* Исследование явления воронкообразования. — Тр. МАИ *, 1954, вып. 38, с. 100—149.
99. *Перник А. Д.* Проблемы кавитации.— Л. : Судостроение, 1966.— 439 с.
100. *Пирсол И.* Кавитация.— М. : Мир, 1975.— 94 с.
101. *Поликовский В. И., Перельман Р. Г.* Воронкообразование в жидкости с открытой поверхностью.— М. ; Л. : Госэнергоиздат, 1959.— 190 с.
102. *Притвиц Н. А.* Гидродинамический расчет круглого циркуляционного отстойника непрерывного действия.— Изв. АН СССР. Сер. Механика и машиностроение, 1959, № 3, с. 25—31.
103. *Путилин С. И.* Крыло предельно малого удлинения над неплоским экраном.— Гидромеханика, Киев : Наук. думка, 1977, вып. 35, с. 29—35.
104. *Рабинович Б. В.* Введение в литейную гидравлику.— М. : Машиностроение, 1966.— 423 с.
105. *Резняков А. Б., Устименко Б. П., Вышенский В. В., Курмангалиев М. Р.* Теплотехнические основы циклонных топочных и технологических процессов.— Алма-Ата : Наука, 1974.— 374 с.
106. *Рождественский В. В.* Кавитация.— Л. : Судостроение, 1977.— 247 с.
107. *Романовский Б. И.* Симметричное струйное обтекание контуров с водопротоком.— Тр. ЦАГИ, 1980, вып. 2060, с. 31—53.
108. *Савченко Ю. Н.* Моделирование развитых кавитационных течений в искривленном гидролотке.— Гидромеханика, 1974, вып. 26, с. 3—5.
109. *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики.— М. ; Л.: Гостехиздат, 1950.— 443 с.
110. *Серебряков В. В.* Кольцевая модель для расчета осесимметричных течений с развитой кавитацией.— Гидромеханика, 1974, вып. 27, с. 25—29.
111. *Сретенский Л. Н.* Теория волновых движений жидкости.— М. : ОНТИ, 1936.— 803 с.
112. *Сю* (*Hsu C. C.*). О развитии исследований по кавитации.— Теорет. основы инж. расчетов, 1975, № 4, с. 151—165.
113. *Терентьев А. Г.* Наклонный вход тонкого тела в несжимаемую жидкость.— Изв. АН СССР. Сер. Механика жидкости и газа, 1977, № 5, с. 16—24.
114. *Тихонов А. И.* Плоская задача о движении крыла под поверхностью тяжелой жидкости конечной глубины.— Там же. Сер. Отд-ние техн. наук, 1940, № 4, с. 57—78.
115. *Тихонов А. И., Малярова Н. Д.* Метод расчета формы свободной поверхности жидкости за глиссирующей поверхностью.— Тр. ЦАГИ, 1974, вып. 1548, с. 20—31.
116. *Федорюк М. В.* Метод перевала.— М. : Наука, 1977.— 368 с.
117. *Флинн Г.* Физика акустической кавитации в жидкостях.— В кн.: Физическая акустика. М. : Мир, 1966, т. 1, с. 7—138.
118. *Фокеев В. С.* Вихревые воронки и их применение на электростанциях.— М. ; Л. : Энергия, 1964.— 184 с.
119. *Форхеймер Ф.* Гидравлика.— М. ; Л. : Энергоиздат, 1935.— 604 с.
120. *Халпахчян А. Х.* К вопросу об истечении жидкости через донные отверстия.— Изв. АН АрмССР. Сер. Физ.-мат., естеств. и техн. науки, 1948, 1, № 2, с. 91—124.
121. *Халпахчян А. Х.* К вопросу о методе измерения интенсивности водоворотов.— Тр. гидравл. лаб. Моск. инж.-стр. ин-т, 1958, с. 33—39.

* МАИ — Московский авиационный институт.

122. *Цейтлин М. Ю.* Исследование сопротивления эллипсоидов вращения при осесимметричном струйном обтекании.— Тр. ЦАГИ, 1960, вып. 801, с. 1—20.
123. *Чудинов С. Д.* Приближенный метод определения формы свободной поверхности за крылом.— Тр. ЛКИ *, 1967, вып.58, с. 137—145.
124. *Шевчук Ю. Р.* Влияние углов наклона кавитатора на форму несимметричной каверны.— Гидромеханика, 1977, вып. 35, с. 22—26.
125. *Шевчук Ю. Р.* Об эквивалентных кавитаторах при расчете каверн за эллиптическими насадками.— Там же, 1978, вып. 37, с. 67—72.
126. *Шевчук Ю. Р.* Приближенный расчет каверны с учетом поверхностного натяжения и сил тяжести.— Там же, 1979, вып. 40, с. 20—25.
127. *Шевчук Ю. Р.* Кавитационные течения за эллиптическими кавитаторами, произвольно ориентированными в потоке.— Прикл. механика, 1980, № 8, с. 30—34.
128. *Шевчук Ю. Р.* Об одном способе расчета формы каверны за наклонным кавитатором.— В кн.: Динамика сплошной среды со свободными поверхностями. Чебоксары : Изд-во Чуваш. ун-та, 1980, с. 158—166.
129. *Шорыгин О. П., Шульман Н. А.* Вход в воду диска с углом атаки.— Учен. зап. ЦАГИ, 1977, 8, № 1, с. 12—21.
130. *Эпштейн Л. А.* Течения около тел вращения при малых числах кавитации.— М., 1961.— 13 с.— (Тр. ЦАГИ ; Вып. 817).
131. *Эпштейн Л. А.* Деформация свободной поверхности за крылом.— М., 1964.— 20 с. (Тр. ЦАГИ ; Вып. 932).
132. *Эпштейн Л. А.* О минимальном числе кавитации и ширине каверны в плоском и осесимметричном каналах.— Изв. АН СССР. Сер. Механика жидкости и газа, 1966, № 5, с. 78—91.
133. *Эпштейн Л. А.* Об учете влияния стенок канала на величину миделя каверны.— Там же, 1968, № 2, с. 127—128.
134. *Эпштейн Л. А.* Методы теории размерностей и подобия в задачах гидромеханики судов.— Л. : Судостроение, 1970.— 208 с.
135. *Эпштейн Л. А.* Характеристики вентилируемых каверн и некоторые масштабные эффекты.— В кн.: Неустановившиеся течения воды с большими скоростями. М. : Наука, 1973, с. 173—185.
136. *Эпштейн Л. А.* Приближенный учет влияния стенок на мидель каверны, моделированной по схеме Эфроса или Рябушинского.— Изв. АН СССР. Сер. Механика жидкости и газа, 1975, № 6, с. 161—163.
137. *Эшли Х., Лэндал М.* Аэродинамика крыльев и корпусов летательных аппаратов.— М. : Машиностроение, 1969.— 318 с.
138. *Якимов Ю. Л.* Об осесимметричном срывном обтекании тела вращения при малых числах кавитации.—Прикл. математика и механика, 1968, 32, вып. 3, с. 499—501.
139. *Якимов Ю. Л.* К постановке задачи о движении тела в воде.—Изв. АН СССР. Сер. Механика жидкости и газа, 1980, № 5, с. 19—26.
140. *Якимов Ю. Л.* Асимптотические законы вырождения формы тонких каверн.— Там же, 1981, № 3, с. 3—10.
141. *Якимов Ю. Л.* Об интеграле энергии при движении с малыми числами кавитации и предельных формах каверн.— Там же, 1983, № 3, с. 67—70.
142. *Янг (Young A. C. H.), Сонг (Song C. C. S.)* Влияние силы тяжести и свободной поверхности на полностью кавитирующее течение.— Теорет. основы инж. расчетов, 1975, № 4, с. 208—218.
143. *Acosta A. J.* The effect of longitudinal gravity on the supercavitating flow over a wedge.— Trans. ASME E, 1961, 28, N 2, p. 188—192.
144. *Anwar H. O.* Flow in free vortex.— Water Power, 1965, N 4, p. 153—161.
145. *Anwar H. O.* Vortices in a viscous fluid.— J. Hydraul. Res., 1968, 6, N 1, p. 1—13.
146. *Anwar H. O.* Vortices at low-head intakes.—Water Power, 1967, 19, N11, p. 455.
147. *Arakeri A. H.* Viscous effects on the position of cavitation separation from smooth bodies.— J. Fluid Mech., 1975, 68, N 4, p. 779—799.
148. *Chou Y. S.* Axisymmetric cavity flows past slender bodies of revolution.— J. Hydronaut., 1974, 8, N 1, p.13—19.

* ЛКИ — Ленинградский кораблестроительный институт.

149. *Cumberbatch E.* Cavitating flow past a large aspect. ratio hydrofoil. — J. Ship, Res., 1961, 4.
150. *Dagget L. L., Keulegan G. H.* Similitude in free surface vortex formations.— Proc. ASCE, hydr. divisn., 1974, 100, N 11, p. 1565—1581.
151. *Einstein H. A., Li H.* Steady vortex flow in real fluid.— Houille blanche, 1955, N 4, p. 483—496.
152. *Heineman E., Rouve G.* Vortex formations in two—phase free surfase flow. Hydraulic engineering for improved water managment.— In: Proc. 17th congr. Intern. assoc. hydraul. res. Baden—Baden, 1977, vol.1, p. 451—458.
153. *Hogner E.* A contribution to the theory of ship waves.— Arch. matematik, astronomi och fysik, 1922, 17, N 12, halte 3/4, p. 1—50.
154. *Larock B. E., Strett R. L.* A nonlinear theory for full cavitating hydrofoil in a transverse gravity field.— J. Fluid Mech., 1967, 29, N 2, p. 317—336.
155. *Luthander S., Rydberg A.* Experimentelle Untersuchungen über den Luftwiderstand bei einer um eine mit der Windrichtung paralellen Achse rotierende Kugel.— Phys. Z., 1935, 36, S. 552.
156. *Maxworthy T.* An experimental determination of the slow motion of a sphere in a rotating viscous fluid.— J. Fluid Mech., 1965, 23, N 2, p. 373—384.
157. *Milldt K. M., Green T.* Flexible wedges in super cavitating flow.— J. Ship Res., 1982, 26, N 4, p. 261—265.
158. *Nishiyama T.* Linearised theory of fully wetted hydrofoils.— In: Advances in hydroscience. New York ; London : Acad. press, 1966, vol. 3, p. 238—342.
159. *Nishiyama T., Koboyshi H.* Finite cavity flow of axial symmetry.— Technol. Repts Tohoku Univ., 1969, 34, N 1, p. 173—178.
160. *Seddon A. E., Anwar H. O.* Measuring fluid velocities optically.— Engineering, 1963, 196, N 5081, p. 44—45.
161. *Stevens J. C., Kolf R. C.* Vortex flow through horizonatl orifices.— Proc. ASCE, 1957, 83, N SA6, part 1, p. 1—12.
162. *Street R. L.* Supercavitating flow about a slender wedge in a transverse gravity field.— J. Ship Res., 1963, N 1, p. 14—23.
163. *Street R. L.* A note on gravity effects in supercavitating flow.— Ibid., 1965, 9, N 4.
164. *Ursell.* On kelvin ship-wave pattern.— J. Fluid Mech., 1960, 8, N 3, p. 418—431.
165. *Wald R. L.* Cavitation and polyphase flow forum, 1974.— Amer. Soc. Mech. Eng., 1976, 28, N 4, p. 1—48.
166. *Wanden-Broeck J.-M.* The influence of surfase tension on cavitating flow past a curved obstacle.— J. Fluid Mech., 1983, 133, p. 255—264.
167. *Wang D. P.* Oblique water entry and exit of a fully ventilated foil.— J. Ship Res., 1979, 23, N 1, p. 43—54.
168. *Wang D. P., Wu T. Y.* General formulation of a pertubation theory for unsteady cavity flows.— Trans. ASME, 1965, 87, N 4, p. 1006—1010.
169. *Wu T. Y.* Cavity and wake flows.— Ann. Fluid Mech., 1974, N 4, p. 243—284.
170. *Zielinski P. B., Villemonte J. R.* Effect of viscosity on vortex-orifice flow.— Proc. ASCE, hydr. divisn., 1968, 94, N 3, p. 745—752.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Георгий Владимирович Логвинович
Василий Николаевич Буйвол
Александр Семенович Дудко
Светозар Иванович Путилин
Юлия Романовна Шевчук

**ТЕЧЕНИЯ
СО СВОБОДНЫМИ
ПОВЕРХНОСТЯМИ**

---

*Утверждено к печати ученым советом
Института гидромеханики АН УССР*

Редактор *Т. С. Мельник*
Оформление художника *Г. М. Балюна*
Художественный редактор *И. П. Антонюк*
Технический редактор *Т. С. Березяк*
Корректоры *Л. С. Трилевич,
Д. Я. Кашпер, Л. М. Тищенко*

Информ. бланк № 6844

Сдано в набор 26.11.84. Подп. в печ. 22.04.85. БФ 01576. Формат 60×90/16. Бум. тип. № 1. Лит. гарн. Выс. печ. Усл. печ. л. 18,5. Усл. кр.-отт. 18,5. Уч.-изд. л. 20,23. Тираж 1000 экз. Заказ 4-893. Цена 3 р. 40 к.

Издательство «Наукова думка», 252601 Киев 4, ул. Репина, 3.

Киевская книжная типография научной книги, 252004 Киев 4, ул. Репина, 4.